第四章　向量代数和空间解析几何

第一节　向量代数

例 1　设 ΔABC 的边 AB 被点 M、N 三等分，已知：$\overrightarrow{CM}=\vec{m}$，$\overrightarrow{CN}=\vec{n}$，求 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$.

解：向量的加法与数乘向量.

将 CM 延长到 D，使 $|CM|=|MD|$. 连 AD，ND，则 $ACND$ 是平行四边形. 因此，有 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CM}$. 即 $\overrightarrow{CA}=2\vec{m}-\vec{n}$ 同理，得 $\overrightarrow{CB}=2\vec{n}-\vec{m}$.

习题

(a) 已知：平行四边形 $ABCD$ 中 BC 边的中点为 H，CD 边的中点为 K，且 $\overrightarrow{AH}=\vec{h}$，$\overrightarrow{AK}=\vec{k}$. 求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$.

(b) 设平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A、B、C、D 与中心 E 的向径分别为 $\vec{r_1}$、$\vec{r_2}$、$\vec{r_3}$、$\vec{r_4}$ 与 $\vec{r}$，求证：$\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}+\vec{r_4}=4\vec{r}$.

例 2　已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求向量 $\vec{c}$，使之平分向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之间的夹角.

解：向量的加法与数乘向量.

向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 非零，以单位向量 $\vec{a}^0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 和 $\vec{b}^0=\dfrac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ 为邻边产生的平行四边形是一个菱形，它的对角线平分对角. 于是 $\vec{c}=\vec{a}^0+\vec{b}^0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\dfrac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$.

习题

(a)从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\vec{a}=\{8,9,-12\}$ 的方向取向量 $\overrightarrow{AB}$，使得 $|\overrightarrow{AB}|=34$，求点 B 的坐标.

(b) 给定点 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$. 线段 $\overrightarrow{AB}$ 交 xOy 平面于 P，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，求 λ.

(c) 已知三角形 ABC 的两个顶点为 $A(-4,-1,-2)$，$B(3,5,-16)$. 并且边 AC 的中点在 y 轴上，BC 的中点在 xoz 平面上，求顶点 C 的坐标.

例 3　设三个单位向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

解：向量的数量积.

将等式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 的两边与自身做数量积，得

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=0.$$

于是，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$.

习题

(a) 求向量 $\vec{x}$，使得与向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ 平行，且 $\vec{a}\cdot\vec{x}=-18$.

(b) 求向量 $\vec{a}=\{3,1,2\}$ 在向量 $\vec{b}=\{1,-2,2\}$ 方向上的投影.

例 4　设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个向量，求证：$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$.

证:分别计算 $\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{a}-\vec{b}$ 与自身的数量积,得

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b},\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

再相加即得.

习题

(a) 已知$|\vec{a}|=13$,$|\vec{b}|=19$,$|\vec{a}+\vec{b}|=24$,求$|\vec{a}-\vec{b}|$.

(b) 求证:向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行的充分必要条件是:$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$.

例 5 设向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足:$\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直,$\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直,而且 $\vec{a}$ 是单位向量,求 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 之间的夹角.

解:向量的数量积.垂直条件.

用向量垂直条件,得

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$$
$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$$

解方程组,得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$,$|\vec{b}|^2=1$.则向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 之间的夹角的余弦为 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$.于是,夹角等于$\frac{\pi}{3}$.

习题

(a) 求证:向量 $\vec{p}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$ 与向量$\vec{a}$ 垂直.

(b) 设一个平面平行于两向量 $\vec{x}=3\vec{i}+\vec{j}$ 和$\vec{y}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$,则向量 $\vec{z}=2\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$ 与这个平面垂直.

例 6 设向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 两两不平行,则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$的充分必要条件为:$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

证:向量的向量积.

必要性:用向量 $\vec{a}$ 左乘$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,得 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$.即 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$.同理得另一个等式.

充分性:从 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$,可得 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$.根据向量平行条件,存在实数 μ,使得 $\vec{b}+\vec{c}=\mu\vec{a}$.用向量 $\vec{b}$ 左乘此式,得 $\vec{b}\times\vec{c}=\mu\vec{b}\times\vec{a}$.于是,$(1+\mu)\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$.因为向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 两两不平行,$\mu=-1$.

习题

(a) 空间中点 A、B、C 的向径分别记为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$,则三点 A、B、C 共线的充分必要条件为 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$.

(b) 求证:向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 互相垂直的充分必要条件是:$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$.

例 7 已知三角形的顶点 $A(1,-1,2)$,$B(5,-6,2)$和 $C(1,3,-1)$,求从顶点 B 到边AC 的高线的长度.

解:向量的向量积.平行四边形的面积.

计算向量$\overrightarrow{AB}=\{4,-5,0\}$,$\overrightarrow{AC}=\{0,4,-3\}$,则向量积$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{15,12,16\}$.

设所求为 h，用两种方法计算以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形的面积，得

$$5h = h|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 25.$$

于是 $h=5$.

习题

(a) 设 $\vec{A}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{B}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$. 问：

(1) k 为何值时，$\vec{A}\perp\vec{B}$；

(2) k 为何值时，以 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 为邻边的平行四边形面积等于 6.

(b)记 ΔABC 的三顶点的向径为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，则它的面积等于 $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$.

例 8 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个向量，求证：$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

证：数量积与向量积.

由定义，有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta.$$

将两式平方，再相加即得.

习题

(a) 设$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，求$|\vec{a}\times\vec{b}|$.

(b)设向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}=\{1,1,1\}$，求 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之间的夹角.

例 9 设点 A,B,C 的向径$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共面，则过这三个向量终点的平面与向量 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ 垂直.

证：向量的混合积.

因为向量 $\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{c}-\vec{a}$ 与所述平面平行，但互相不平行，所以只需证明这两个向量皆与向量 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ 垂直.

$$\begin{aligned}&(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})\\=&(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\\=&-\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.\end{aligned}$$

同理，$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=0$.

习题

(a)求证：四点 $A(1,1,-1)$，$B(-2,-2,2)$，$C(1,-1,2)$与 $D(0,0,0)$共面.

(b)设三个单位向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，求$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

(c)设向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共面，解向量方程 $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$.

例 10* 求证：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

证：向量的坐标.

设 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$，则

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=(b_2c_3-b_3c_2)\vec{i}+(b_3c_1-b_1c_3)\vec{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\vec{k}.$$

$$左边=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1\end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}右边&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})\\&=[a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)]\vec{i}+[a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)]\vec{j}\\&\quad+[a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)]\vec{k}.\end{aligned}$$

习题

(a)设 $\vec{a}\perp\vec{b}$,则 $\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})))=|\vec{a}|^4\vec{b}$.

例 11* 在坐标空间中任意给定点集 $A_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,和点 $O(a,b,c)$,则下述命题等价:

(1)点 O 是点集 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ 的重心,即有 $a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$;

(2) $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$;

(3)对于空间中任意一点 $M(x,y,z)$,有 $\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2$.

证:点集的重心.

(1)→(2):由 $a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}&=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-a)\vec{i}+(y_i-b)\vec{j}+(z_i-c)\vec{k}]\\&=\vec{i}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)+\vec{j}\sum_{i=1}^{n}(y_i-b)+\vec{k}\sum_{i=1}^{n}(z_i-c)=\vec{0}.\end{aligned}$$

(2)→(3):用向量投影的性质,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2&=\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA_i}|^2=\sum_{i=1}^{n}(|OM|^2+|OA_i|^2-2\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA_i})\\&=\sum_{i=1}^{n}|OM|^2+\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2-2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA_i}\\&=n|OM|^2+\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2-2\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{OM}}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\\&=n|OM|^2+\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2.\end{aligned}$$

(3)→(1):将点 $M(x,y,z)$ 看作动点,则不等式 $\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2$ 表明:函数 $\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2$ 在点 $O(a,b,c)$ 处取到最小值.然而,

$$\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(z-z_i)^2.$$

根据极值判定定理,最小值点的坐标应为 $a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$.

评述:当需要证明三个或更多的命题等价时,这种循环推导的办法有时可以节省篇幅.

习题

(a) 在坐标平面上任意给定点集 $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,它们的重心是点 O. 求证:满足条件 $\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2=c>c_0=\sum_{i=1}^{n}|OA_i|^2$ 的点 M 的集合是以点 O 为圆心,以 $R=\sqrt{\frac{c-c_0}{n}}$ 为半径的圆.

第二节　空间的直线与平面

例 1　求平面,过点 $M(1,2,1)$,且与直线 $x=2-t, y=-4+3t, z=-1+t$ 垂直.

解:用平面的点法式方程.

平面的法向量为 $\{-1,3,1\}$,于是方程为 $-(x-1)+3(y-2)+(z-1)=0$,即 $-x+3y+z=6$.

习题

(a)求平面,过点(5,4,3),且与平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行.

(b)求平面,垂直平分连接两点 $M_1(2,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 的线段.

例 2　求平面,过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$,且与平面 $x+y+z=0$ 垂直.

解:用平面的混合积方程.

任取所求平面上一点 $A(x,y,z)$,则向量 $\overrightarrow{M_1A}=\{x-1,y-1,z-1\}$ 与向量 $\overrightarrow{M_2M_1}=\{1,0,2\}$ 以及平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $\{1,1,1\}$ 共面. 于是,有

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

即 $-2x+y+z=0$.

习题

(a)求平面,过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$,且与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ 平行.

(b)求平面,过点 $M(3,-1,-5)$,且与平面 $3x-2y+2z+7=0$ 及 $5x-4y+3z+1=0$ 都垂直.

(c)从点 $M(2,3,-5)$ 向三个坐标平面作垂线,求过三个垂足的平面方程.

例 3　求平面,平行于已知平面 $2x+y+2z+5=0$,且与三个坐标平面围成的四面体的体积等于 1.

解:用平面的截距式方程.

因为与平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行,所以设所求方程为 $2x+y+2z=D$. 化为截距式方程,得 $\frac{x}{D/2}+\frac{y}{D}+\frac{z}{D/2}=1$. 于是,四面体的体积等于 $\frac{1}{6}\left|\frac{D}{2}\frac{D}{1}\frac{D}{2}\right|=1$. 解得 $D=\pm 2\sqrt[3]{3}$. 所求平面为 $2x+y+2z=\pm 2\sqrt[3]{3}$.

习题

(a)求平面,过点 $M(5,4,3)$,且在坐标轴上的三个截距相等.

(b)在所有的过点 $M(5,4,3)$，且具有正截距的平面中，求平面，使它与三个坐标平面围成的四面体的体积最小.

例 4　求平面，过 z 轴，且与平面 $y=x$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

解:设特殊的一般方程.

过 z 轴的平面的一般方程为$Ax+By=0$.计算它与平面 $y=x$ 的夹角余弦，得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|A-B|}{\sqrt{2}\sqrt{A^2+B^2}}.$$

化简，得 $A^2-4AB+B^2=0$. 于是，$B=(2\pm\sqrt{3})A$. 代入，得 $x+(2\pm\sqrt{3})y=0$.

习题

(a) 求平面，过点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$，且与 yOz 平面垂直.

例 5　求平面，过点 $M(3,2,1)$，且过平面 $x+y+5z=1$ 与 $2x+3y-z+2=0$ 的交线.

解:用平面束方程.

过平面 $x+y+5z=1$ 与 $2x+3y-z+2=0$ 的交线的平面束的方程为

$$(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(5-\lambda)z=1-2\lambda.$$

将点 $M(3,2,1)$代入，得 $\lambda=-\frac{9}{13}$. 于是，所求平面为 $5x+14y-74z+31=0$.

习题

(a) 求平面，过直线$\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角等于$\frac{\pi}{4}$.

(b)求平面，过直线$\begin{cases}x+28y-2z+17=0\\5x+8y-z+1=0\end{cases}$，且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切.

例 6　求直线，过点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$.

解:用直线的对称式方程.

直线的方向向量为$\{1,0,2\}$，对称式方程为$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{2}$.

习题

(a)求直线，过点 $M(2,1,3)$，且与平面 $x-2y-z+4=0$ 垂直.

(b)求直线，过点 $M(1,-2,3)$，且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$平行.

例 7　求直线，过点 $M(1,1,1)$，且与直线$\begin{cases}2x+3y+z-4=0\\3x+y+2z+1=0.\end{cases}$平行

解:用直线的一般方程.

过点 $M(1,1,1)$，且与平面 $2x+3y+z-6=0$ 的平行的平面方程为 $2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$. 于是，所求直线的一般方程为

$$\begin{cases}2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0\\3(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0\end{cases}.$$

习题

(a)求直线，过点 $M(1,1,1)$，且与直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$及$\begin{cases}y=3x-4\\z=2x-1\end{cases}$都垂直.

(b)在平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 内作直线,通过平面与直线 $L:\begin{cases}x+2z=0\\ y+z+1=0\end{cases}$ 的交点,且与直线 L 垂直.

(c)求直线,过点 $M(0,1,1)$,且与二直线 $x=y=z$ 及 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ 相交.

例 8 求直线,过点 $M(2,1,3)$,且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交.

解:用直线的参数方程和直线束方程.

已知直线的参数式方程为: $x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$. 于是,过点 $M(2,1,3)$,且与已知直线相交的直线束的方程为

$$\frac{x-2}{3-3t}=\frac{y-1}{-2t}=\frac{z-3}{3+t}.$$

由垂直条件得 $3(3-3t)+2(-2t)-(3+t)=0$. 解得 $t=7/3$,所求直线为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

习题

(a)求直线,过点 $M(-2,3,0)$,与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交,且与平面 $x-2y-z+4=0$ 平行.

(b)求直线,过点 $M(1,-2,3)$,与 z 轴相交,且与直线 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-2}$ 垂直.

例 9 求直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$ 与平面 $x-y+2z=3$ 的夹角.

解:夹角.

$$\sin\varphi=\frac{|2+1+4|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+4}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

习题

(a) 求直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与直线 $\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 的夹角.

例 10 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}$ 的距离.

解 1:距离.

直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}$ 上任意一点的坐标为 $x=-t, y=4+3t, z=3+2t$. 与点 $M(1,2,3)$ 的距离的平方为 $d^2=14t^2+14t+5$. 当 $t=-\frac{1}{2}$ 时,最小距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

解 2:直线的方向向量为 $\vec{t}=\{-1,3,2\}$.

点 $M(1,2,3)$ 与直线上点 $P(0,4,3)$ 构成向量 $\overrightarrow{MP}=\{-1,2,0\}$ 的模等于 $\sqrt{5}$. 它在直线的方向向量上的投影为

$$\mathrm{Pr}_{\vec{t}}\,\overrightarrow{MP}=\frac{\vec{t}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\vec{t}|}=\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

由勾股定理,所求为$\sqrt{5-\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

习题

(a) 求直线$\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}$与平面 $x+y-z=4$ 之间的距离.

(b) 求平行直线 L_1:$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$与 L_2:$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$之间的距离.

(c)求异面直线 L_1:$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$与 L_2:$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$之间的距离.

例 11 求点,与已知点 $M(1,2,3)$关于平面 $x+y-z=1$ 对称.

解:点与平面,直线的位置关系.

过已知点 $M(1,2,3)$,且与平面 $x+y-z=1$ 垂直的直线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$.其参数式方程为 $x=1+t,y=2+t,z=3-t$.

在直线与平面的交点处,有$(1+t)+(2+t)-(3-t)=1$,解得 $t=\frac{1}{3}$.于是,在关于平面的对称点处,应有 $t=2/3$.所求点为$(5/3,8/3,7/3)$.

习题

(a)求点 $M(1,-3,2)$在平面 $6x+3y-z=41$ 上的投影.

(b)求点,与已知点 $M(4,3,1)$关于直线$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3}$对称.

例 12 求 a,使直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{a}$与$x+1=y-1=z$ 相交.

解:平面,直线的位置关系.

空间不平行的直线相交等价于它们共面.用混合积,有

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=0$$

于是,$a=\frac{5}{4}$.

习题

(a) 研究直线$\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$与平面 $4x-2y+z-2=0$ 之间的关系.

第三节 空间的曲线与曲面

例 1 求到直线 L_1:$\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$和 $L_2$$\begin{cases} y=0 \\ z=-1 \end{cases}$的距离相等的点的轨迹.

解:点的轨迹.

设点 $M(x,y,z)$满足条件,用两点间距离公式,有$\sqrt{x^2+(z-1)^2}=\sqrt{y^2+(z+1)^2}$.变形,得 $x^2-y^2=4z$.这是双曲抛物面.

习题

(a)求到 z 轴和 xOy 平面的距离之比等于常数k,$0<k<+\infty$的点的轨迹.

(b)求到点(0,0,1)和平面 $z=-1$ 的距离相等的点的轨迹.

(c)求到点$(0,0,-c)$和$(0,0,c)$的距离之和等于常数 $2a(a>c>0)$的点的轨迹.

例 2 求过点 $M_0(0,0,0)$, $M_1(1,0,0)$, $M_2(1,2,0)$和 $M_4(1,2,3)$的球面方程.

解:球面.

设球心坐标为(a,b,c),由它到点 $M_0(0,0,0)$和 $M_1(1,0,0)$的距离相等,得 $\sqrt{(a-1)^2+b^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.解得 $a=1/2$.类似可得 $b=1, c=3/2$.计算可得,球半径为$\sqrt{7/2}$.球面方程为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$.

习题

(a)求过点 $A(1,2,-4)$, $B(1,-3,1)$和 $C(2,2,3)$,且球心在 xOy 平面上的球面方程.

(b)求过点 $A(0,3,3)$, $B(-1,3,4)$,且球心在直线$\begin{cases}2x+4y-z-7=0\\4x+5y+z-14=0\end{cases}$上的球面方程.

例 3 求直线$\begin{cases}x=2z\\y=1\end{cases}$绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程.

解:旋转曲面.

直线上点 $M_0(x_0,y_0,z)$到 z 轴的距离的平方为$x_0^2+y_0^2=4z^2+1$.于是,曲面上点 $M(x,y,z)$的坐标满足方程 $x^2+y^2=4z^2+1$.

习题

(a)求 yOz 平面上的曲线$L:(y-2)^2+z^2=1$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程.

(b)曲面 $4x^2-3y^2+4z^2=36$ 是如何旋转产生的?

例 4* 求以平面曲线$\begin{cases}z=0\\f(x,y)=0\end{cases}$为准线,母线的方向向量为$(l,m,n)$, $n\neq0$ 的柱面方程.

解:柱面.

对于准线上一点$(x_0,y_0,0)$,直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z}{n}$完全在柱面上.解方程组,得 $x_0=x-\frac{l}{n}z$, $y_0=y-\frac{m}{n}z$.代入方程 $f(x_0,y_0)=0$,得所求柱面方程 $f\left(x-\frac{l}{n}z, y-\frac{m}{n}z\right)=0$.

习题

(a)求过三条直线$\begin{cases}x=0\\z=y\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\z=y+2\end{cases}$和$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\z=y\end{cases}$的圆柱面方程.

(b)求证:方程 $e^{2x-z}=\sin(3y+2z)$的图形是一个柱面.

例 5* 求以坐标原点为顶点,以平面曲线$\begin{cases}z=1\\f(x,y)=0\end{cases}$为准线的锥面方程.

解:锥面.

对于准线上一点$(x_0,y_0,1)$,直线$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{1}$完全在锥面上.于是,$x_0=\frac{x}{z}$, $y_0=\frac{y}{z}$.代入,得所求锥面方程 $f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$.

习题

(a)求以点 $A(0,0,1)$ 为顶点,以椭圆 $\begin{cases} z=3 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.

(b)求顶点在 $A(1,0,0)$,且与 xOy 平面之间夹角等于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的锥面方程.

(c)求顶点在坐标原点,且过三个坐标轴的圆锥面方程.

例 6 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+2y+2z=3$ 的交线在 yOz 平面上的投影曲线的方程.

解:空间曲线的投影.

消去 x,得 $5y^2+8yz+5z^2-12y-12z=0$.

习题

(a) 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xoz 平面上的投影曲线的方程.

例 7 求曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $y+z=R$ 的交线的参数方程.

解:空间曲线的参数方程.

首先将交线在某个坐标平面上的投影参数化.

交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2+(R-y)^2=R^2$. 改写,得 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{\left(y-\dfrac{R}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}=1$. 参数化,得 $x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $y=\dfrac{R}{2}(1+\sin\theta)$. 代入方程 $y+z=R$,得 $z=\dfrac{R}{2}(1-\sin\theta)$.

注意 向 yOz 平面投影,得线段. 不能得到投影曲线的方程.

习题

(a)求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 的交线的参数方程.

(b)求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+z=3$ 的交线的参数方程.

例 8* 求平面,过 x 轴,且与椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $b<a<c$ 的交线是一个圆.

解:空间曲线.

坐标平面 $y=0$ 与椭球面的交线不是圆. 其他过 x 轴的平面可以表示为 $z=ky$,与椭球面的交线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=ky \end{cases}$. 如果交线是圆,由对称性,这个圆的圆心在坐标原点. 又因为点 $(\pm a,0,0)$ 在这个圆上,所以圆的半径等于 a.

这个圆与 yOz 平面的交点的坐标为 $x=0$, $y=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{c^2+k^2b^2}}$, $z=\pm\dfrac{kbc}{\sqrt{c^2+k^2b^2}}$. 因为这两个点到坐标原点的距离等于半径 a,所以 $k=\pm\dfrac{c}{b}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}}$. 即所求平面 $z=\pm\dfrac{c}{b}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}}y$.

习题

(a)求平面,过点 $A(-2,0,0)$, $B(0,-2,0)$,且与曲面 $x^2+y^2=z^2$ 的交线是抛物线.

(b)求平面,它与曲面 $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-2x+8y-4z-2=0$ 的交线是有

心二次曲线，且此曲线的中心在坐标原点.

答案与提示

第一节　向量代数

1.(a)$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\vec{h}-\frac{2}{3}\vec{k}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\vec{k}-\frac{2}{3}\vec{h}$.(b)向量 $\vec{r}=\overrightarrow{OE}$是三角形的中线.

2.(a)(18,17,−17).(b)$\frac{7}{2}$.(c)(4,−5,2).

3.(a)$-4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$.(b)$\frac{5}{3}$.

4.(a)用本例.22.(b)有零向量，用约定.否则用定义.

5.(a)计算数量积.(b)计算 $\vec{z}$ 与$\vec{x}$、$\vec{y}$，的数量积.

6.(a)共线充要条件是：$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ 与$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ 平行.(b)有零向量，用约定.否则用定义.

7.(a)(1) −2.(2)−1 或 5.(b)做向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的向量积.

8.(a)用本例.2.(b)$\frac{\pi}{6}$.

9.(a)计算$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$的混合积.(b)4.(c)用向量 $\vec{b}\times\vec{c}$ 等右乘方程.

10.(a)用本例.

11.(a)仿本例证明.

第二节　空间的直线与平面

1.(a)$2(x-5)+(y-4)+2(z-3)=0$.(b)$(x-1)+z=0$.

2.(a)$-2(x-1)+(z-1)=0$.(b)$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0$.
(c)$15(x-2)+10(y-3)-6z=0$.

3.(a) $x+y+z=12$.(b)$\frac{x}{15}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$，最小体积 270.

4.(a)$-y+1=0$.

5.(a)$x+20y+7z-12=0$.(b)$3x-4y-5=0$，$387x-164y-24z-421=0$.

6.(a)$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.(b)$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

7.(a)$\begin{cases}(x-1)+2(y-1)+(z-1)=0\\(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=0\end{cases}$.(b)$\begin{cases}2x+(y+1)-z=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$.(c)$\begin{cases}y-z=0\\x+z-1=0\end{cases}$.

8.(a)$\frac{x+2}{-11}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-7}$.(b)$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{-1}$.

9.(a)$\frac{\pi}{3}$.

10.(a)$\sqrt{3}$.(b)$\frac{2}{\sqrt{3}}$.(c)7.

11.(a)(7,0,1).(b)(0,5,3).

12.(a)直线与平面垂直.

第三节　空间的曲线与曲面

1.(a) $x^2+y^2=k^2z^2$.(b)$x^2+y^2=4z$.(c)$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$,其中 $b^2=a^2-c^2$.

2.(a)$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$.(b)$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$.

3.(a)$(x^2+y^2+z^2-5)^2=16(1-z^2)$.(b)$4x^2-3y^2=36, z=0$ 绕 y 轴旋转一周.
或 $-3y^2+4z^2=36, x=0$ 绕 y 轴旋转一周.

4.(a)用柱面定义.研究与 xOy 平面的交线.$\frac{(x-\sqrt{2}/2)^2}{1}+\frac{(y-z+1)^2}{2}=1$.
(b)证明过曲面上一点与定方向平行的直线在曲面上.

5.(a)用锥面定义.$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=\frac{(z-1)^2}{2^2}$.(b)用夹角余弦公式.$(x-1)^2+y^2=z^2$.
(c)用夹角余弦公式.$xy\pm yz\pm zx=0$.

6.(a)$2x^2+2xz+z^2-2x-3z+1=0$.

7.(a)$x=\frac{R}{2}(1+\cos\theta), y=\frac{R}{2}\sin\theta, z=R\sin\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.
(b)$x=-1+2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=5-4\cos\theta$.

8.(a)与 xOy 平面的夹角为$\frac{\pi}{4}$.$x+y\pm\sqrt{2}z+2=0$.(b)投影是中心在原点的有心曲线.
$z=-\frac{1}{2}x+2y$.

第五章　多元函数微分学

第一节　多元函数的极限与连续

例1　求函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域.

解: 二元函数的定义域.

由二次根式,得 $y\geqslant 0$ 且 $x-\sqrt{y}\geqslant 0$.

习题　求下列函数的定义域.

(a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$.

(b) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

例 2　设 $f\left(\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x(y-x)}{x-2y}$,求 $f(x,y)$.

解 1: 复合函数.

改写,得 $f\left(\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x(y-x)}{x-2y}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{xy}-\dfrac{2}{x^2}}$. 于是 $f(x,y)=\dfrac{y-x}{y(x-2y)}$.

解 2: 令 $u=\dfrac{1}{y},v=\dfrac{1}{x}$. 代入化简,得 $f(u,v)=\dfrac{v-u}{v(u-2v)}$.

即 $f(x,y)=\dfrac{y-x}{y(x-2y)}$.

评述: 解 2 叙述比较复杂,但是使用范围比较广泛.

习题

(a) 已知 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,求 $f\left(\dfrac{y}{x},1\right)$.

(b) 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

例 3　计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}$.

解: 用一元函数极限的法则与定理.

因为 $x\to 0,y\to 0$,所以 $xy\to 0$. 这是 1^∞ 型未定式. 因为 $|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$,所以 $|xy|\dfrac{|\sin x|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|\sin x|$. 根据极限存在准则 1, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|xy|\dfrac{|\sin x|}{x^2+y^2}=0$.

再由函数连续性有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}=1$.

习题　求下列极限.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{\ln(1+x)}$.

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

例 4　计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

解:用极坐标求极限.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,根据极限定义,$x\to 0, y\to 0$ 即 $r\to 0$.代入,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2 y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0.$$

这里用到极限的无穷小乘有界量定理.

习题　求下列极限.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2-xy+y^2}$.

例 5　求证:极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

证:选择不同路径(相当于数列或一元函数的子列),证明极限不存在.

一种常用的(不是万能的!)路径是沿直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋向于点 (x_0,y_0).在这里是沿直线 $y=kx$ 趋向于坐标原点.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

因为极限值与 k 有关,即沿不同直线趋向于坐标原点时,有不同极限值,所以原极限不存在.

习题　求证下述极限不存在.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$.

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

例 6　求证:极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ 不存在.

证:选择不同路径,证明极限不存在.

本节例 5 中的直线路径在这里无效.需要寻找曲线路径.当动点沿抛物线 $y=-x+kx^2$ 趋向于坐标原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2kx+k^2x^2}{k}=\frac{2}{k}.$$

极限值与 k 有关,原极限不存在.

习题 求证下列极限不存在.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

例 7 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个去心邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A>0$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $f(x,y)>0$.

证: 用极限定义研究函数性质.

按照多元函数极限的定义，取 $\varepsilon=A>0$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<A$. 去掉绝对值号即得.

评述: 这是多元函数的保号性定理. 多元函数的极限是一元函数的极限的推广，因此一元函数极限的许多性质定理和判定定理在多元函数的情形依然成立. 请读者逐个予以核查.

习题

(a) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个空心邻域内有定义，且 $f(x,y)\geqslant 0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$，则 $A\geqslant 0$.

(b) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个空心邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，$f(x,y)$ 有界.

例 8 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，且 $f(x_0,y_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$.

证: 用定义证明。

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$。去掉绝对值符号即得.

评述: 这个命题大致相当于加强的极限保号性定理. 审查一元函数微积分中的各个命题，看是否可以推广到多元函数，是非常有意义的练习.

习题

(a) 设函数 $f(x,y)$ 在坐标原点连续，且满足函数方程 $f(3x,2y)=f(x,y)$，则 $f(x,y)$ 恒等于一个常数.

例 9 研究函数 $z=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的连续性.

解: 用定义判定连续.

根据初等函数的连续性，当 $y\neq 0$ 时，函数连续. 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\frac{1}{y}=0$，所以函数在坐标原点也连续.

当沿着与 y 轴平行的直线趋向于 x 轴上其他的点时,极限不存在.于是这些点是函数的间断点.

习题 研究下列函数的连续性.

(a) $z=\begin{cases} x\arctan\dfrac{y}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(b) $z=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

例 10 设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续,又存在常数 $L>0$,使得对于任意两点 (x,y_1), (x,y_2),有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$,则函数 $f(x,y)$ 连续.

证:用定义判定连续.

任意取点 (x_0,y_0).对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由于对于取定的 y 的值,函数关于自变量 x 连续,存在 $\delta_1>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2L}\right\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|[f(x,y)-f(x,y_0)]-[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)]|$$
$$\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$\leqslant L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant L\delta+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

习题

(a)设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,且存在常数 $L_1>0, L_2>0$,使得对于区域内任意两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2),有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant L_1|x_1-x_2|+L_2|y_1-y_2|$,则函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

例 11 设函数 $f(x,y)$ 在全坐标平面连续,且有 $\lim\limits_{r\to\infty}f(x,y)=+\infty$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $f(x,y)$ 取到最小值.

证:用多元连续函数的最大最小值定理.

由问题条件,对于 $M=|f(0,0)|+1$,存在 $R>0$,使得当 $r>R$ 时,有 $f(x,y)\geqslant M$.

考虑有界闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant R^2$.根据连续函数的最大最小值定理,函数 $f(x,y)$ 在 D 上取到最小值 m,而且 $m\leqslant f(0,0)<|f(0,0)|+1=M$.于是,这个最小值也是函数在整个坐标平面上的最小值.

习题

(a)写出一元函数的相应命题.

(b)设函数 $f(x,y)>0$ 在全坐标平面连续,且有 $\lim\limits_{r\to\infty}f(x,y)=0$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $f(x,y)$ 取到最大值.

(c)设函数 $f(x,y)>0$ 在有界闭区域 D 上连续,则函数 $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 在 D 上有界.

例 12 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续.又 C 是 D 内一条由连续函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 定义的曲线,则将函数 $f(x,y)$ 限制在 C 上所得的一元函数连续.

证:用定理证明连续.

所得的一元函数为 $F(t)=f[\varphi(t),\psi(t)]$. 根据复合函数连续定理,这个一元函数连续.

习题

(a)设函数 $f(x,y)$在区域 D 内连续,且存在两点(x_1,y_1),(x_2,y_2),使得 $f(x_1,y_1)<0<f(x_2,y_2)$,则存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得 $f(\xi,\eta)=0$.

评述:这个命题可以称为多元连续函数的零点定理. 当然也有介值定理.

(b)设函数 $f(x,y)$在包含圆周 $C:x^2+y^2=1$ 的区域 D 内连续,则 $f(x,y)$取到它在 C 上的最大最小值M 和 m. 而且,对于介于 M 和 m 之间的任何值,$f(x,y)$在 C 上至少取到两次.

(c)设函数 $f(x,y)$在全坐标平面连续,且当 $x^2+y^2>0$ 时,$f(x,y)>0$. 又设对于任意的点(x,y)和任意的正数 c,有 $f(cx,cy)=cf(x,y)$,则存在 $0<a<b$,使得 $a\sqrt{x^2+y^2}\leqslant f(x,y)\leqslant b\sqrt{x^2+y^2}$.

第二节　偏导数与全微分

例 1　设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,计算$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解:用定义求偏导数.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,用导数公式得$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

当 $x=y=0$ 时,用偏导数定义,得 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$. 同理有 $f_y(0,0)=0$.

习题

(a)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

例 2　设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,则它在坐标原点连续,但没有偏导数.

解:用定义证连续,求偏导数

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,函数在,所以坐标原点连续.

当 $x=y=0$ 时,用偏导数定义,得 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$不存在. 同理有 $f_y(0,0)$不存在.

习题

(a)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,则它在坐标原点有偏导数,但不连续.

(b)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,求证:$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

例 3 设函数 $z=(xy)^2\sin(x+y)$，计算混合偏导数$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$，其中 p、q 是自然数.

解:用乘积导数公式和 $\sin^{(n)}x=\sin(x+\frac{1}{2}n\pi)$.

$$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}=(x^2-2C_p^2)[y^2\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q)\pi)$$
$$+2C_q^1y\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q-1)\pi)+2C_q^2\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q-2)\pi)]$$
$$+2C_p^1x[y^2\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q-1)\pi)$$
$$+2C_q^1y\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q-2)\pi)+2C_q^2\sin(x+y+\frac{1}{2}(p+q-3)\pi)].$$

习题 求下列函数的混合偏导数$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$.

(a)$z=e^{ax}\sin by$.

(b)$z=\frac{x-y}{x+y}$.

例 4 设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有偏导数$f_y(x,y)$.又设存在两点$(x_0,y_1),(x_0,y_2)\in D$,其中 $y_1<y_2$,使得 $f(x_0,y_1)=f(x_0,y_2)$,则存在 $y_1<\eta<y_2$,使得 $f_y(x_0,\eta)=0$.

证:用一元函数的微分中值定理.

函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数就是将 $f(x,y)$限制在直线 $x=x_0$ 上所得一元函数 $z(y)=f(x_0,y)$的导数.因此,一元函数的很多结果可以直接转移到这里来.

用一元函数的罗尔定理.

因为连接点(x_0,y_1)、(x_0,y_2)的线段完全属于区域 D,而一元函数 $z(y)=f(x_0,y)$在区间$[y_1,y_2]$上可导,且 $z(y_1)=z(y_2)$,根据罗尔定理,存在 $\eta\in(y_1,y_2)$,使得 $z'(\eta)=0$.即 $f_y(x_0,\eta)=0$.

评述:因为偏导数$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$是将函数 $z=f(x,y)$限制在直线 $y=y_0$ 上所得的一元函数 $g(x)=f(x,y_0)$在点 $x=x_0$ 的导数,所以一元函数与导数有关的命题多能以某种方式转移到多元函数上来.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有偏导数$f_y(x,y)$,则对于任意给定的两点$(x_0,y_1),(x_0,y_2)\in D$,存在 $y_1<\eta<y_2$,使得 $f(x_0,y_2)-f(x_0,y_1)=f_y(x_0,\eta)(y_2-y_1)$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有二阶偏导数 $f_{yy}(x,y)>0$,则对于任意的 $a\leqslant x\leqslant b$,有 $f(x,c)+f(x,d)>2f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)$.

(c)设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有连续的偏导数 $f_y(x,y)$.又设两点$(x,y_1),(x,y_2)\in D$,则 $f(x,y_2)-f(x,y_1)=\int_{y_1}^{y_2}f_y(x,y)\mathrm{d}y$.

例 5 设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有偏导数,则对于任意

给定的两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,存在$(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)\in D$,使得 $f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=f_x(\xi_1,\eta_1)(x_2-x_1)+f_y(\xi_2,\eta_2)(y_2-y_1)$.

证:用一元函数的微分中值定理.

因为连接点(x_1,y_1)与(x_2,y_1)线段完全属于区域 D,对一元函数 $z(x)=f(x,y_1)$用拉格朗日中值定理,得 $f(x_2,y_1)-f(x_1,y_1)=f_x(\xi_1,\eta_1)(x_2-x_1)$.同理,对一元函数 $z(x)=f(x_2,y)$用拉格朗日中值定理,得 $f(x_2,y_2)-f(x_2,y_1)=f_y(\xi_2,\eta_2)(y_2-y_1)$.将两式相加即得.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的一个邻域内有偏导数 $f_x(x,y)$和 $f_y(x,y)$,且偏导数有界,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续.

(b)设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内关于自变量x 连续,且偏导数 $f_y(x,y)$有界,则 $f(x,y)$在区域内连续.

(c)设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有连续的偏导数,则 $f(b,d)-f(a,c)=\int_a^b f_x(x,c)\mathrm{d}x+\int_c^d f_y(b,y)\mathrm{d}y=\int_a^b f_x(x,d)\mathrm{d}x+\int_c^d f_y(a,y)\mathrm{d}y$.

例 6 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有偏导数,又设存在点(x_0,y_0),使得对于任意点(x,y)有 $f(x_0,y_0)\geqslant f(x,y)$,则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

证:用一元函数的费马定理.

将函数 $z=f(x,y)$限制在直线 $y=y_0$ 上,然后对所得的一元函数用费马定理可得 $f_x(x_0,y_0)=0$.同样得 $f_y(x_0,y_0)=0$.

评述:这个命题可以看作二元函数的费马定理.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 上连续,在区域 $x^2+y^2<R^2$ 内有偏导数,在圆周 $C:x^2+y^2=R^2$ 上取常数值,则存在点(x_0,y_0)满足 $x_0^2+y_0^2<R^2$,使得 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 上连续,在区域 $x^2+y^2<R^2$ 内有偏导数,且偏导数满足偏微分方程$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z$.又设在圆周 $C:x^2+y^2=R^2$ 上函数 $f(x,y)$恒等于零.

(1)求函数 $z=f(x,y)$;

(2)满足条件的函数是否唯一?

例 7* 设函数 $z=f(x,y)$在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续,在区域 $x^2+y^2<1$ 内有偏导数,满足$|f(x,y)|\leqslant 1$,则存在点(x_0,y_0),满足 $x_0^2+y_0^2<1$,使得 $f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)<16$.

证:用一元函数的费马定理.

令 $F(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$,则 $F(x,y)$连续,且在单位圆周上的值不小于 1,在坐标原点的值不大于 1,于是函数 $F(x,y)$的最小值在区域 D 的一个内点(x_0,y_0)取到.

根据本节例 6,有 $F_x(x_0,y_0)=F_y(x_0,y_0)=0$.即 $f_x(x_0,y_0)+4x_0=0,f_y(x_0,y_0)+4y_0=0$.于是,

$$f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)=16(x_0^2+y_0^2)<16.$$

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 上连续,在区域 $x^2+y^2<R^2$ 内有偏导数,在圆周 $C:x^2+y^2=R^2$ 上恒等于零,则存在点 (x_0,y_0),满足 $x_0^2+y_0^2<R^2$,使得 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D:x\geqslant0,y\geqslant0$ 上连续,在区域 $x>0,y>0$ 内有偏导数,在直线 $x+y=1$ 上恒等于零,则存在 (x_0,y_0),满足 $x_0>0,y_0>0$,使得 $x_0f_x(x_0,y_0)=y_0f_y(x_0,y_0)$.

例 8 设函数 $z=f(x,y)$ 满足不等式 $|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$,则 $f(x,y)$ 在坐标原点可微.

证:用定义判定可微.

将坐标原点代入不等式,得 $f(0,0)=0$.因为

$$\left|\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right|=\left|\frac{f(x,0)}{x}\right|\leqslant|x|.$$

根据极限存在准则 1,有 $f_x(0,0)=0$.同理 $f_y(0,0)=0$.记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.因为

$$\left|\frac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}\right|=\left|\frac{f(x,y)}{\rho}\right|\leqslant\rho.$$

所以 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=0$.即 $f(x,y)$ 在坐标原点可微.

习题

(a)设函数 $g(x,y)$ 在坐标原点连续,且 $g(0,0)=0$,则 $F(x,y)=|x-y|g(x,y)$ 在坐标原点可微.

(b)设函数 $f(x,y)$ 有偏导数,且 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

例 9 记 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,则 $f(x,y)$ 在坐标原点连续,且有偏导数,但是在原点不可微.

证:用定义判定不可微.

易见 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$.即 $f(x,y)$ 在坐标原点连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

同理 $f_y(0,0)=0$.最后考虑极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因为沿直线 $y=x$,此极限等于 $\dfrac{1}{\sqrt2}$,所以函数 $f(x,y)$ 原点不可微.

习题

(a)记函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,则 $f(x,y)$ 在坐标原点的一个邻域内连续,且偏导数有界,但是在原点不可微.

(b)记函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$,则 $f(x,y)$ 在坐标原点可微,但是偏导数在原点不连续.

第三节　复合函数导数公式

例 1　设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,$u=x^n f\left(\frac{y}{x^a},\frac{z}{x^b}\right)$,则函数 u 满足偏微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+ay\frac{\partial u}{\partial y}+bz\frac{\partial u}{\partial z}=nu.$$

证:证明复合函数满足给定方程.用复合函数导数公式.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=nx^{n-1}f-x^n f_1'(-a)\frac{y}{x^{a+1}}+x^n f_2'(-b)\frac{z}{x^{b+1}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^n f_1'\frac{1}{x^a};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^n f_2'\frac{1}{x^b}.$$

将这三个等式代入问题中方程的左端即可.

习题

(a)设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,$z=f(2x-y,y\sin x)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

(b)设函数 $f(x)$ 可导,函数 $g(x,y)$ 有连续的偏导数,$z=f(2x-y)+g(x,xy)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

例 2　设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,$z=f(x+y,xy)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解:复合函数的二阶导数.

对 x 求导,得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'y$.再对 y 求导,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+f_{12}''x+f_{21}''y+f_{22}''xy=f_{11}''+f_{12}''(x+y)+f_{22}''xy.$$

评述:复合函数的偏导数仍然是复合函数.

习题

(a)设函数 $f(x),g(x)$ 二次可导,则函数 $u=f\left(\frac{y}{x}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足偏微分方程 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

(b)设函数 $f(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数,$u=f(x,y,z)$,$z=xe^y$,求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

例 3　设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,求函数 $u=f(x-y,y-z)$ 所满足的偏微分方程.

解:求复合函数所满足的方程.

将函数 $u=f(x-y,y-z)$ 分别对 x,y 和 z 求导,得 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'$,$\frac{\partial u}{\partial y}=-f_1'+f_2'$ 和

$\frac{\partial u}{\partial z}=-f'_2$,代入.得$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

评述:将函数求偏导,直到能够消去函数符号 f.

习题

(a)求函数 $z=f(x^2+y^2)$所满足的偏微分方程.

(b)求函数 $z=f(xy)$所满足的偏微分方程.

(c)求函数 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yg\left(\frac{x}{y}\right)$所满足的偏微分方程.

例 4 设函数 $u=f(x,y)$满足拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则函数 $v=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$也满足拉普拉斯方程.

证:复合函数求导.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'_2\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f''_{11}\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}+2f''_{12}\frac{(y^2-x^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}+f''_{22}\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}+f'_1\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}+f'_2\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

因为自变量 x 与 y 具有对称性,有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=f''_{11}\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}+2f''_{12}\frac{(x^2-y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}+f''_{22}\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}+f'_1\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}+f'_2\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}.$$

将两式相加即得.

习题

(a)设函数 $u=f(x,t)$满足偏微分方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,则函数 $v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}f\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{t}\right)(t>0)$也满足这个方程.

评述:这个方程称为热传导方程.与拉普拉斯方程一样,是典型的二阶偏微分方程.

例 5 设函数 $z=z(x,y)$有连续的二阶偏导数,$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,求证:$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$.

解:用复合函数求导公式作变量替换.

以原自变量作为中间变量.由坐标变换公式 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,得

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin^2\theta.$$

同样得

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta.$$

代入方程右端即可.

习题

(a)设函数 $z=z(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,求证:

(1) $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \theta}$;

(2) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=r\frac{\partial z}{\partial r}$.

(b)设函数 $z=z(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, $x=e^r\cos\theta$, $y=e^r\sin\theta$,求证: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)$.

例 6 引入新的自变量 $\xi=x+ay$, $\eta=x+by$,化简偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

解:变量替换,新自变量.

以新自变量为中间变量,用复合函数导数公式.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

同理得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. 代入问题中的方程,得

$$(1+5a+a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(2+5a+5b+2ab)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(1+5b+b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

取 a、b 分别为方程 $x^2+5x+1=0$ 的两个根,则原方程化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

习题

(a)引入新自变量 $u=\ln x$, $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$,变换偏微分方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

(b)引入新自变量 $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$,变换偏微分方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial y}$.

例 7* 引入新函数 $v(x,y)=u(x,y)e^{ax+by}$,化简偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解:变量替换,新函数.

改写得 $u(x,y)=v(x,y)e^{-ax-by}$,对 x 求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{-ax-by}+v(-a)e^{-ax-by};\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{-ax-by}-2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{-ax-by}+a^2ve^{-ax-by}.$$

同样得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{-ax-by}+v(-b)e^{-ax-by};\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{-ax-by}-2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{-ax-by}+b^2ve^{-ax-by}.$$

代入方程,消去 e^{-ax-by},得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2(1-a)\frac{\partial v}{\partial x}+2(b-3)\frac{\partial v}{\partial y}+(a^2-b^2-2a+6b)v=0.$$

取 $a=1,b=3$,得$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+8v=0$.

习题

(a)引入新函数 $v(x,y)=u(x,y)e^{ax+by}$,化简偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+p\frac{\partial u}{\partial x}+q\frac{\partial u}{\partial y}+ru=0$.

(b)引入新函数 $v=u^2$,变换偏微分方程 $u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

例 8 设 $x=e^{u+v},y=e^{u-v},z=uv$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解:曲面的参数方程.

以原自变量 x、y 为中间变量,u、v 为自变量,用复合函数导数公式.

$$v=\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}e^{u+v}+\frac{\partial z}{\partial y}e^{u-v};$$

$$u=\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}e^{u+v}-\frac{\partial z}{\partial y}e^{u-v}.$$

解方程组,得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u+v}{2}e^{-u-v}$;得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-u+v}{2}e^{-u+v}$.

习题

(a)设 $x=e^u\cos v,y=e^u\sin v,z=uv$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

(b)设 $x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

例 9 设函数 $u=u(x,y,z)$由方程 $F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 确定,其中函数 $F(r,s,t)$有连续的偏导数,且 $F_r+F_s+F_t\neq 0$,则函数 u 满足偏微分方程$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}$.

证:隐函数求导.

将问题中方程的两端同时对 x 求导,注意 u 是 x 的函数,得

$$F'_1\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}-2x\right)+F'_2 2u\frac{\partial u}{\partial x}+F'_3 2u\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

即$(F'_1+F'_2+F'_3)\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=F'_1\frac{1}{u}$.同样对 y 和 z 求导,将三式相加,消去 $F'_1+F'_2+F'_3$ 即可.

习题

(a)设函数 $z=z(x,y)$由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$确定,求全微分 $\mathrm{d}z$.

(b)设函数 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$确定,其中函数 $f(t)$可导,则函数 $z=z(x,y)$满足偏微分方程$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

(c)设函数 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$确定,其中函数 $f(t)$可导,求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

例 10 设函数 $u=f(x,y,z)$有连续的偏导数,且满足函数方程 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$,则称此函数为 n 次齐次函数,求证:n 次齐次函数满足偏微分方程 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$.

证:隐函数求导.

将函数方程的两端同时对 t 求导,得

$$xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z).$$

在此式中取 $t=1$ 即为所求.

习题

(a)设 n 次齐次函数$u=f(x,y,z)$有连续的偏导数,则其偏导数 $f_x(x,y,z)$等都是$n-1$次齐次函数.

(b)设 n 次齐次函数 $u=f(x,y,z)$有连续的二阶偏导数,则它满足偏微分方程 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u$.

(c)推广本例和习题(b).

例 11 设函数 $u=f(x,y,z)$,$y=g(x,t)$,$t=h(x,z)$,计算$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解:由方程组确定的隐函数求导.

这里共有五个变量,三个方程,因此只有两个是自变量.从所求可知:x 和 z 是自变量,而 u、y 和 t 是它们的函数.

将问题中的三个方程分别对 x 求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},\quad \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}.$$

同理,分别对 z 求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z},\quad \frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial z}.$$

代入消去函数 y 和 t 的偏导数,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}.$$

评述:在空间解析几何中,一个方程对应一个曲面,而两个方程的组对应这两个曲面的交线.这里讨论的问题是上述事实的推广.

习题

(a)设 $x^2+y^2+z^2=k^2,ax+by+cz=d$,求$\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^2z}{dx^2}$.

(b)设 $x=f(t),y=g(t),z=h(t)$,求$\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^2z}{dx^2}$.

例 12 设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,且当 $y=x^2$ 时,有 $f(x,y)=1$ 和$\frac{\partial f}{\partial x}=x$,求此时的$\frac{\partial f}{\partial y}$.

解:由方程组确定的隐函数求导.

这是将二元函数限制在一条曲线上.可以将 $y=x^2$ 代入 $f(x,y)=1$,也可以将方程组对 x 求导.如果用后者,要注意 y 是x 的函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+2x\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

最后将$\frac{\partial f}{\partial x}=x$ 代入,得$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{2}$.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数,$x=u+v,y=uv^2$,且当 $u=v=1$ 时,有$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$,求此时的$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数,满足微分方程$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,且当 $y=2x$ 时,有 $f(x,y)=x,\frac{\partial f}{\partial x}=x^2$,求此时的$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

例 13 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有连续的偏导数,两点$(x,y),(x+h,y+k)$以及连接它们的线段都属于 D,则存在 $0<\theta<1$,使得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f_x(x+\theta h,y+\theta y)h+f_y(x+\theta h,y+\theta y)k.$$

证:用一元函数的拉格朗日中值定理.

令 $F(t)=f(x+th,y+tk),0\leqslant t\leqslant 1$,则 $F(t)$可导.而且 $F(1)=f(x+h,y+k),F(0)=f(x,y)$. $F'(t)=hf_x(x+th,y+tk)+kf_y(x+th,y+tk)$.在区间$[0,1]$上对函数 $F(t)$用拉格朗日中值公式,得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f_x(x+\theta h,y+\theta y)h+f_y(x+\theta h,y+\theta y)k.$$

评述:这是二元函数的拉格朗日中值定理.

习题

(a) 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有连续的偏导数,两点$(x,y),(x+h,y+k)$以及连接它

们的线段都属于 D,且 $f(x,y)=f(x+h,y+k)$,则存在 $0<\theta<1$,使得 $hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)=0$.

评述:这是二元函数的罗尔定理.

例 14 设函数 $z=f(x,y)$在区域 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 上有连续的偏导数,且满足不等式 $f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)\leqslant M^2$,则有 $|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant MR$.

证:用本节例 13 证明不等式.

对$(x,y)\in D$,用本节例 13 与柯西不等式,得

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(0,0)|=|f_x(\theta x,\theta y)x+f_y(\theta x,\theta y)y|\\ \leqslant&|f_x(\theta x,\theta y)||x|+|f_y(\theta x,\theta y)||y|\\ \leqslant&\sqrt{f_x^2(\theta x,\theta y)+f_y^2(\theta x,\theta y)}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant MR.\end{aligned}$$

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在区域 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 上有连续的偏导数,且满足不等式 $f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)\leqslant M^2$. 又设在圆周 $C:x^2+y^2=R^2$ 上,$f(x,y)$恒等于零,则 $|f(x,y)|\leqslant M(R-\sqrt{x^2+y^2})$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,且 $\lim\limits_{r\to\infty}\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=1$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,求证:函数 $f(x,y)$取到其最小值.

例 15 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有连续的 $n+1$ 阶偏导数,两点(x,y),$(x+h,y+k)$以及连接它们的线段都属于 D,则存在 $0<\theta<1$,使得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x,y)+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x,y)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k).$$

证:用一元函数的泰勒公式.

令 $F(t)=f(x+th,y+tk)$,$0\leqslant t\leqslant 1$,则 $F(t)$有连续的 $n+1$ 阶导函数. 在点 $t=0$ 处对函数 $F(t)$用泰勒公式即可.

评述:这是二元函数的泰勒公式.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在矩形闭区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有连续的二阶偏导数,且满足 $f_{xx}(x,y)>0$,$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)\geqslant f_{xy}^2(x,y)$,则对于区域上任意两点$(x,y)$和$(x+h,y+k)$,有 $f(x+h,y+k)\geqslant f(x,y)+f_x(x,y)h+f_y(x,y)k$.

例 16* 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有连续的偏导数,两点(x,y),$(x+h,y+k)$以及连接它们的线段都属于 D,则

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\int_0^1 f_x(x+th,y+tk)\mathrm{d}t+k\int_0^1 f_y(x+th,y+tk)\mathrm{d}t.$$

证:用牛顿-莱布尼兹公式.

令 $F(t)=f(x+th,y+tk)$,$0\leqslant t\leqslant 1$,则 $F(t)$有连续的导函数. 在区间$[0,1]$上对函数 $F(t)$

用牛顿-莱布尼兹公式即得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\int_0^1 f_x(x+th,y+tk)\mathrm{d}t+k\int_0^1 f_y(x+th,y+tk)\mathrm{d}t.$$

评述:这个命题可以称为二元函数的牛顿-莱布尼兹公式.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$有连续偏导数,且$|f_x(x,y)|\leqslant 2|x-y|$,$|f_y(x,y)|\leqslant 2|x-y|$,$f(0,0)=0$,则$|f(5,4)|\leqslant 1$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内有连续的二阶偏导数,两点(x,y),$(x+h,y+k)$以及连接它们的线段都属于 D,则

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f_x(x,y)h+f_y(x,y)k+h^2\int_0^1(1-t)f_{xx}(x+th,y+tk)\mathrm{d}t+$$
$$hk\int_0^1(1-t)f_{xy}(x+th,y+tk)\mathrm{d}t+k^2\int_0^1(1-t)f_{yy}(x+th,y+tk)\mathrm{d}t.$$

第四节　切线与切平面

例 1　在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上求一点,使得曲线在此点处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解:参数方程给定的曲线的切线.

求导,得 $x'=1,y'=2t,z'=3t^2$.根据直线与平面平行条件,有 $1+4t+3t^2=0$.解方程,得 $t=-1,t=-\dfrac{1}{3}$.得二点,$(-1,1,-1)$和$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

习题

(a)求曲线 $x=a\sin^2t,y=b\sin t\cos t,z=c\cos^2t$ 在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线和法平面.

例 2　求证:螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 的切线与 z 轴的夹角等于定角.

证:参数方程给定的曲线.

螺旋线的切线的方向向量为$\{-a\sin t,a\cos t,b\}$,z 轴正向的方向向量为$\{0,0,1\}$.它们夹角的方向余弦为 $\cos\gamma=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$是一个常数,于是夹角等于定角.

习题

(a)求证:曲线 $x=ae^t\cos t,y=ae^t\sin t,z=ae^t(a>0)$在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上,而且曲线上任意一点处的切线与圆锥面的过此点的母线相交成定角.

例 3　求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}$在点$\left(\dfrac{R}{2},\dfrac{R}{2},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$处的切线.

解 1:一般方程给定的曲线.切线的对称式方程.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,$G(x,y,z)=x^2+y^2-Rx$,对变量 x 求导,得

$$2x+2y\frac{\partial y}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,2x+2y\frac{\partial y}{\partial x}-R=0$$

将点$\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$代入，得$\frac{\partial y}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 则切线方程$\frac{x-\frac{R}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}$. 即$\begin{cases}x+\sqrt{2}z=\frac{3R}{2}\\ y=\frac{R}{2}\end{cases}$.

解 2:切线的一般方程.

分别求两个曲面在该点的切平面，则其交线就是所求切线. 即$\begin{cases}x+y+\sqrt{2}z=2R\\ y=\frac{R}{2}\end{cases}$.

习题

(a)求曲线$\begin{cases}2x-3y+5z=4\\ x^2+y^2+z^2=3z\end{cases}$在点(1,1,1)处的切线和法平面.

(b)在曲线$\begin{cases}z=xy\\ x^2+y^2=1\end{cases}$上求一点，使得曲线在此点处的切线与下述直线平行：$\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

(c)过曲面$z=\arctan\frac{y}{x}$上点$\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$处作平行于 z 轴的平面，使得曲面与平面的交线在此点处的切线平行于 xOy 平面.

例 4 在曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上求一点，使得曲面在该点处的切平面与 $2x+2y+z-1=0$ 平行.

解:曲面的切平面.

曲面上点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为$\{2x_0,2y_0,1\}$，与平面 $2x+2y+z-1=0$ 的法向量比较，得 $x_0=y_0=1$. 于是，$z_0=2$. 切平面方程 $2x+2y+z-6=0$.

习题

(a)求由 xOy 平面上的曲线 $3x^2+2y^2=12$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向曲面外侧的单位法向量.

(b)在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使得曲面在此点处的法线与三个坐标轴的夹角相等.

(c)在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使得曲面在此点处的切平面在三个坐标轴上的截距的绝对值相等.

例 5 求过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$，且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面的方程.

解:求曲面的切平面.

过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$的平面束的方程为

$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z=27.$$

曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面的方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$. 于是应有

$10+\lambda=3x_0, 2+\lambda=y_0, 2+\lambda=z_0$,其中 $3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27$.解这个方程组可得两个平面 $9x+y-z=27$ 和 $-9x-17y+17z=27$.

习题

(a)求平面,过直线$\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$,且与曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 相切.

(b)求 a、b,使得曲面 $z=x^2+y^2$ 在点$(1,-2,5)$处的切平面过直线$\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z=3\end{cases}$.

(c)求曲面 $z=x^2+4y^2$ 的切平面方程,此平面过点$(5,2,1)$,且与直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$平行.

例 6 求证:曲面 $xyz=a^3(a>0)$的切平面与坐标平面围成的四面体的体积等于常数.

证:研究切平面的性质.

记 $F(x,y,z)=xyz-a^3$,则在曲面上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面的方程为$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$.于是,四面体的体积为 $V=\dfrac{1}{6}|3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0|=\dfrac{9}{2}a^3$.

习题

(a)求证:曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$的切平面在三个坐标轴上的截距之和等于常数.

(b)求证:曲面 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}(a>0)$的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和等于常数.

(c)将前面两个习题推广.

例 7 设函数 $f(x)$可导,且 $f'(x)\neq 0$,则曲面 $z=f(x^2+y^2)$在任意一点处的法线与 z 轴相交.

证:特殊类型的曲面的切平面.

曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+2x_0f'(x_0^2+y_0^2)t\\y=y_0+2y_0f'(x_0^2+y_0^2)t\\z=z_0-t\end{cases}$$

取 $t=-\dfrac{1}{2f'(x_0^2+y_0^2)}$即可.

评述:这是旋转曲面的特征之一.

习题

(a)设函数 $F(x)$有连续的导数,则由方程 $F(x^2+y^2+z^2)=ax+by+cz$ 确定的曲面在任意一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量与向量$\{a,b,c\}$和$\{x_0,y_0,z_0\}$共面.

例 8 设函数 $F(x,y)$有连续的偏导数,则由方程 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 确定的曲面在任意一点处的切平面平行于一条定直线.

证:特殊类型的曲面的切平面.

将方程的左端分别对 x、y 和 z 求导,得曲面的一个法向量$\{F'_1n, F'_2n, -F'_1l-F'_2m\}$,它与定向量$\{l,m,n\}$垂直.

评述:这是柱面的特征之一.

习题

(a)设函数 $F(x,y)$有连续的偏导数,则由方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$满足微分方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.给出这个等式的几何解释.

(b)设函数 $F(x,y,z)$有连续的偏导数,则由方程 $F(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$满足微分方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

例 9 设函数 $f(x)$可导,则曲面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$在任意一点处的切平面过坐标原点.

证:特殊类型的曲面的切平面.

曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0).$$

取 $x=y=0$,则得 $z=0$.

评述:这是锥面的特征之一.

习题

(a)设函数 $F(x,y,z)$有连续的偏导数,则由方程 $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定的曲面在任意一点处的切平面过一个定点.

(b)设函数 $F(x,y)$有连续的偏导数,则由方程 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$满足微分方程 $z-c=\frac{\partial z}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-b)$.给出这个等式的几何解释.

例 10* 曲面由参数方程 $x=ue^v,y=ve^u,z=u+v$ 给出,求它在点 $u=v=0$ 处的切平面.

解:参数方程给定的曲面.

以 x、y 为自变量,以 u、v 和 z 为函数,用隐函数组求导的方法.先对 x 求导,得

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}e^v+ue^v\frac{\partial v}{\partial x};0=\frac{\partial v}{\partial x}e^v+ve^u\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

消去$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$,得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v-1}{(uv-1)e^v}$.同样,得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u-1}{(uv-1)e^u}$.将 $u=v=0$ 代入,得曲面在点(0,0,0)处的切平面为 $z=x+y$.

评述:在上一节,我们以 x、y 为中间变量,以 u、v 为自变量,直接用复合函数导数公式计算曲面的参数方程的偏导数.这里,用隐函数组求导的方法.看来,还是前一个方法简单.

习题

(a)求曲面 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=a\theta(a>0)$,在点 $r=r_0,\theta=\theta_0$ 处的切平面方程.

(b)求曲面 $x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v),z=\chi(u,v)$在点 $u=u_0,v=v_0$ 处的法线方程.

例 11 求曲面 $x^2+2y^2+2z^2=5$ 与 $2x^2+2y^2+z^2=5$ 在点(1,1,1)处的夹角.

解:曲面在交点处的夹角.

曲面之间的夹角为切平面之间的夹角.求偏导数,得法向量 $\vec{n}_1=\{2,4,4\},\vec{n}_2=\{4,4,2\}$.于是,$\cos\theta=\frac{|8+4+8|}{\sqrt{4+16+16}\sqrt{16+16+4}}=\frac{5}{7}$.

习题

(a)求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 在交点处的夹角.

例 12* 求证:球坐标系的坐标曲面族 $x^2+y^2+z^2=r^2, y=x\tan\varphi, x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ 两两正交.

证:相交曲面之间的夹角.

设点(x_0,y_0,z_0)满足 $x_0^2+y_0^2\neq 0$,则过此点恰有三个非退化的坐标曲面.它们在此点的法向量分别是(x_0,y_0,z_0),$(\tan\varphi,-1,0)$和$(x_0,y_0,-z_0\tan^2\theta)$.因为任意两个法向量的数量积等于零.所以三个坐标曲面两两正交.

习题

(a)求证:球面 $x^2+y^2+z^2=2ax, x^2+y^2+z^2=2by$ 及 $x^2+y^2+z^2=2cz$ 在交点处两两正交.

例 13* 设曲面 $xyz=d^3$ 与$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在交点处相切.求常数 $d>0$ 与 a、b、c 应满足的关系.

解:设切点为(x,y,z),则

$$xyz=d^3;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\frac{yz}{\frac{2x}{a^2}}=\frac{xz}{\frac{2y}{b^2}}=\frac{xy}{\frac{2z}{c^2}}.$$

从后两式消元,得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$.代入第一式,得 $3\sqrt{3}d^3=abc$.

习题

(a)设平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ 与曲面 $ax^2+by^2-2cz=0$ 在交点处相切,求证:常数满足条件$\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{2\gamma}{c}=0$.

第五节　方向导数与梯度

例 1 求函数 $u=xyz$ 在点(1,1,1)处沿从点(1,1,1)到点(2,3,4)的方向的方向导数.

解:方向导数.

从点(1,1,1)到点(2,3,4)的方向的方向向量 $\vec{n}=\{1,2,3\}$.于是方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

另一方面,函数 $u=xyz$ 在点(1,1,1)处的偏导数为 $u_x=1,u_y=1,u_z=1$.于是所求的方向导数为$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{6}{\sqrt{14}}$.

评述:分别计算偏导数和方向余弦,代入方向导数公式.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微,且在此点沿方向 l_1:{1,1}和方向 l_2:{1,-1}的方向导数分别为 1 和 2,求函数 $z=f(x,y)$在此点的偏导数.

例 2 计算函数 $u=xyz$ 在点(1,2,3)处的、沿球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 在点(2,2,1)处的外法线方向的方向导数.

解:方向导数.

球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 在点(2,2,1)处的外法线的方向向量为 $\vec{n}=\{4,4,2\}$. 于是方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

另一方面,函数 $u=xyz$ 在点(1,2,3)处的偏导数为 $u_x=6$, $u_y=3$, $u_z=2$. 于是所求的方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{20}{3}$.

习题

(a)求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点(1,1,1)处的、沿曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 在点 $t=1$ 处的切线的指向参数增大的方向的方向导数.

(b)求函数 $u=\frac{\sqrt{x^2+8y^2}}{z}$ 在点(1,1,1)处的、沿椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点(1,1,1)处的外法线方向的方向导数.

例 3 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,则至少存在两个方向 l_1 和 l_2,使得 $\frac{\partial z}{\partial l_1}=\frac{\partial z}{\partial l_2}=0$.

证:方向导数.

如果 $z_x=z_y=0$,则沿任意方向的方向导数都等于零.

设 $z_y\neq0$. 为使方向导数等于零,只需 $\tan\alpha=-\frac{z_x}{z_y}$,因此取 x 轴正向到这两个方向的转角分别为 $\alpha_1=-\arctan\frac{z_x}{z_y}$ 和 $\alpha_2=\pi-\arctan\frac{z_x}{z_y}$ 即可.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,l_1 和 l_2 是两个相反的方向,则 $\frac{\partial z}{\partial l_1}+\frac{\partial z}{\partial l_2}=0$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,方向 l_1、l_2 和 l_3 中任意两个之间的夹角等于 $\frac{2\pi}{3}$,则 $\frac{\partial z}{\partial l_1}+\frac{\partial z}{\partial l_2}+\frac{\partial z}{\partial l_3}=0$.

(c)设函数 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 可微,l 是任意方向,则

(1) $\frac{\partial}{\partial l}(u+v)=\frac{\partial u}{\partial l}+\frac{\partial v}{\partial l}$;

(2) $\frac{\partial}{\partial l}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial l}+v\frac{\partial u}{\partial l}$.

例 4* 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,l_1 和 l_2 是两个互相垂直的方向,则 $\left(\frac{\partial z}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial l_2}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.

证:方向导数.

设 x 轴正向到方向 l_1 和 l_2 的转角分别为 α 和 $\frac{\pi}{2}+\alpha$,则

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l_1}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\alpha+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha\sin\alpha+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\alpha;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l_2}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\alpha-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha\sin\alpha+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\alpha.$$

将两式相加即可.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微,l 是任意方向,则$\left|\frac{\partial z}{\partial l}\right|\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

(b)设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微,l_1 和 l_2 是两个方向,它们之间的夹角为$0<\varphi<\pi$ 则 $\max\left\{\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\right\}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial l_2}\right)^2}$.

例 5*　设函数 $z=f(x,y)$可微,方向 l 从点(x,y)指向点$(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)$,记 $\rho=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$,则全微分 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial l}\rho$.

证:方向导数概念的讨论.

在方向导数公式$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$ 的两端同时乘以 ρ,得

$$\rho\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\rho\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\rho\sin\alpha=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}z.$$

评述:一元函数的微分等于导数与自变量的微分的乘积.多元函数的全微分等于方向导数与 $\rho=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$的乘积.

习题

(a)设函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,则它在坐标原点沿任意方向有方向导数,但是在原点没有偏导数.

(b)设函数 $z=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8},x^2+y^2\neq0\\0,x=y=0\end{cases}$,则它在坐标原点沿任意方向有方向导数,但是在原点不连续.

(c)设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)有连续的偏导数,则函数在此点沿任意方向的方向导数等于函数在此点的切平面(作为函数)沿同一方向的方向导数.

评述:一元函数的导数等于其切线的斜率,多元函数的方向导数等于同一方向的切线(射线)的斜率.更好的说法是:一元函数的微分等于其切线的增量,多元函数的全微分等于其切平面的全增量.

例 6　求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点$(1,1,0)$和$(0,1,1)$处的梯度之间的夹角.

解:梯度.

函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点$(1,1,0)$处的偏导数为 $u_x=2,u_y=2,u_z=0$.

函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点$(0,1,1)$处的偏导数为 $u_x=0,u_y=2,u_z=-2$.

$$\mathrm{grad}u(1,1,0)=2\vec{i}+2\vec{j};\mathrm{grad}u(0,1,1)=2\vec{j}-2\vec{k}.$$

所以函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点$(1,1,0)$和$(0,1,1)$处的梯度之间的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

习题

(a)设函数 $f(x,y)$在点(x,y)有连续的偏导数,则在此点处,函数 $f(x,y)$的梯度等于曲面

$z=f(x,y)$的向下的法向量在 xOy 平面上的投影.

评述:这是梯度和法向量之间的关系.

(b)设函数 $u(x,y,z)$,$v(x,y,z)$在点(x,y,z)可微,则

(1)$\text{grad}(u+v)=\text{grad}u+\text{grad}v$;

(2)$\text{grad}(u+v)=v\text{grad}u+u\text{grad}v$.

例 7 设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微,则函数在此点处沿与梯度垂直的方向上的方向导数等于 0.

证:梯度与方向导数.

设方向 l 的方向角为 α,方向 l 与梯度方向的夹角为 θ,则

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cos\theta.$$

易见,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$,或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$,即方向 l 与梯度方向垂直时,方向导数等于零.

习题

(a)当 a、b、c 满足什么关系时,函数 $u=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点$(1,2,-1)$处的方向导数的最大值在 z 轴的正方向取到.

例 8 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的一个邻域内有连续的偏导数,且 $\text{grad}f(x_0,y_0)\neq0$,则曲面 $z=f(x,y)$有唯一的光滑的等高线经过点(x_0,y_0).

证:梯度与等高线.

由 $\text{grad}f(x_0,y_0)\neq0$,不妨设 $f_y(x_0,y_0)\neq0$. 令 $F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$,则函数 $F(x,y)$满足隐函数存在定理的条件. 而由方程 $F(x,y)=0$ 确定的唯一的单值连续可导的函数 $y=y(x)$正是曲面 $z=f(x,y)$的过点(x_0,y_0)的等高线.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续的偏导数,且 $\text{grad}f(x_0,y_0)\neq0$,则曲面 $z=f(x,y)$的过点(x_0,y_0)的等高线与 $\text{grad}f(x_0,y_0)$垂直.

评述:换句话说,等高线的方向就是方向导数等于零的方向.

从本节例 1 开始,我们提到了全微分、方向导数、梯度、等高线等概念之间的种种关系. 其实,只要有了切平面,一切关系都是显而易见的.

(b)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,又 xOy 平面上的光滑闭曲线 C 是函数 $z=f(x,y)$的等高线,则在 C 所围成的区域 D 内存在一点(x_0,y_0),使得 $\text{grad}f(x_0,y_0)=0$.

例 9 计算函数 $z=xy+2x+3y$ 的梯度的模的等高线族.

解:曲面的等高线.

根据梯度定义,$\text{grad}z=\{y+2,x+3\}$.

它的模的等高线族为$(x+3)^2+(y+2)^2=C^2$.

习题

(a)设 x 轴正向到方向 l 的转角为 α,求函数 $z=x^2+xy+y^2$ 沿方向 l 的方向导数的等高线族.

例 10* 设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,则下述命题等价:

(1)$f_x(x,y)\equiv0$;

(2)对于任意实数 a,直线 $y=a$ 是函数 $z=f(x,y)$的等高线;

(3)存在可导函数 $g(y)$,使得 $z=f(x,y)\equiv g(y)$.

证:等高线与偏微分方程.

(1)→(2):对于任意的 $x_1\neq x_2,y$,由命题(1),有

$$f(x_2,y)-f(x_1,y)=f'_x(\xi,\eta)(x_2-x_1)=0.$$

(2)→(3):将函数 $z=f(x,y)$限制在直线 $x=0$ 上,得到可导的一元函数 $z=f(0,y)=g(y)$,由命题(2),对于任意一点(x,y),有

$$z=f(x,y)=f(0,y)=g(y).$$

(3)→(1):任取一点(x,y),由命题(3),有

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(y)-g(y)}{h}=0.$$

评述:又是循环推导.常微分方程的通解含有任意常数,偏微分方程的通解含有任意函数.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,且 $f_x(x,y)\equiv a,f_y(x,y)\equiv b$,则 $z=ax+by+c$,其中 c 是任意常数.

(b)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,且 $f_x(x,y)=2x+3y$,则 $z=x^2+3xy+\psi(y)$,其中 $\psi(y)$是任意的有连续导数的一元函数.

例 11* 设函数 $z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数,且 $f_{xy}(x,y)\equiv 0$,则 $z=\varphi(x)+\psi(y)$,其中 $\varphi(x)$与 $\psi(y)$是任意有连续的二阶导数的一元函数.

证:等高线与偏微分方程.

因为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\equiv 0$,所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=h(x)$,其中 $h(x)$是有连续导数的一元函数.

记 $\varphi(x)=\int_0^x h(t)\mathrm{d}t$,则

$$\frac{\partial}{\partial x}[z-\varphi(x)]=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)=h(x)-h(x)=0.$$

于是,$z-\varphi(x)=\psi(y)$.

评述:本节例 10 习题(b)是一阶偏微分方程,在它的通解中有一个任意函数.这个方程是二阶偏微分方程,通解中有两个任意函数.

习题

(a)求微分方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 的满足条件 $z(x,0)=0,z(0,y)=y^2$ 的解.

(b)解偏微分方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.[提示:令 $\xi=x-at,\eta=x+at$.]

评述:这个方程称为弦振动方程,是典型的偏微分方程之一.

(c)设函数 $z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数,且满足偏微分方程 $f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f\partial f}{\partial x\partial y}$,则 $z=\varphi(x)\psi(y)$,其中 $\varphi(x)$与 $\psi(y)$是任意有连续的二阶导数的一元函数.

例 12 设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,则存在函数 $g(u)$,使得 $f(x,y)=g(ax+by)$,$ab\neq 0$ 的充分必要条件为:$z=f(x,y)$满足微分方程 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

证:等高线与偏微分方程.

必要性:存在函数 $g(u)$,使得 $f(x,y)=g(ax+by)$,$ab\neq 0$,分别对 x 和 y 求导,得$\frac{\partial z}{\partial x}=g'(ax+by)\cdot a$,$\frac{\partial z}{\partial y}=g'(ax+by)\cdot b$. 于是 $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$.

充分性:由 $z=f(x,y)$,$x=x$,$u=ax+by$,用复合函数导数公式,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2(-\frac{a}{b})=(b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y})\frac{1}{a}=0.$$

因此,$z=f(x,y)$只是 u 的函数.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,则存在函数 $g(u)$,使得 $f(x,y)=g(xy)$的充分必要条件为:$z=f(x,y)$满足微分方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$.

例 13* 设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,则 $f(x,y)$在极坐标系下只是 r 的函数的充分必要条件为:$z=f(x,y)$满足微分方程$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

证:等高线与偏微分方程.

必要性:在极坐标里只是 r 的函数,相当于在直角坐标里有 $z=f(x,y)=g(x^2+y^2)$. 分别对 x 和 y 求导,得$\frac{\partial z}{\partial x}=g'(x^2+y^2)\cdot 2x$,$\frac{\partial z}{\partial y}=g'(x^2+y^2)\cdot 2y$. 于是$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

充分性:由 $z=f(x,y)$,$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,用复合函数导数公式,得

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta=-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

因此,$z=f(x,y)$在极坐标里与 θ 无关,只是 r 的函数.

习题

(a)设函数 $z=f(x,y)$有连续的偏导数,则 $f(x,y)$在极坐标系下只是 θ 的函数的充分必要条件为:$z=f(x,y)$满足微分方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

(b)设函数 $u=f(x,y,z)$有连续的偏导数,则 $f(x,y,z)$在球坐标系下只是 r 的函数的充分必要条件为$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}$;而 $f(x,y,z)$与 r 无关的充分必要条件为 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

第六节 多元函数的极值

例 1 计算函数 $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$,$0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{2}$的极值.

解:显函数的极值.

分别对 x 和 y 求导,用极值必要条件,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\sin(x-y)=0;\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)=0.$$

解三角方程组,得唯一驻点 $x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{6}$.

求二阶偏导数,有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x-y);\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y);\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x-y).$$

将驻点代入,得 $A=-\sqrt{3},B=\frac{\sqrt{3}}{2},C=-\sqrt{3}$.因为 $A<0,B^2-AC<0$,根据极值充分条件,$x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{6}$是极大值点,极大值等于$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

评述:用极值必要条件求驻点,需要解一个非线性方程组.这个问题没有通用的解法.一般原则仍然是消元法.

习题

(a)求函数 $z=xy^2(a-x-2y),a>0$ 的极值.

(b)求函数 $z=(ax+by)e^{-(x^2+y^2)}$的极值.

例 2* 求证:函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值,但是没有极小值.

证:多元函数极值的讨论.

将方程分别对 x 和 y 求导,用极值必要条件,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0;\frac{\partial z}{\partial y}=e^y\cos x-(1+y)e^y=0.$$

由前式得 $x=k\pi$.代入后式.当 $x=2k\pi$ 时,得解 $y=0$.当 $x=(2k+1)\pi$ 时,得解 $y=-2$.

求二阶偏导数,将驻点代入,用极值充分条件可知:点$(2k\pi,0)$是极大值点,极大值等于 2;点$((2k+1)\pi,-2)$不是极值点.

评述:关于连续的一元函数,在它的两个极大值点之间,一般应有极小值点(严格叙述这个命题,并予以证明).多元函数不具有这个性质.

习题

(a)设 $z=3x^2y-x^4-2y^2$,则坐标原点不是极值点.但是,如果将函数限制在过原点的任意直线上时,原点是所得的一元函数的极值点.

(b)函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 有唯一的极值,而且是极大值,但不是它的最大值.

例 3 函数 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+yz=11$ 确定,计算 $z(x,y)$的极值.

解:隐函数的极值.

将方程分别对 x 和 y 求导,用极值必要条件,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+2y}{6z+y}=0;\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y+2x+z}{6z+y}=0.$$

解得驻点$(1,-1,2)$和$(-1,1,-2)$.

求二阶偏导数,将驻点代入,用极值充分条件可知:$(1,-1,2)$是极大值点,极大值等于 2;$(-1,1,-2)$是极小值点,极小值等于 -2.

习题 求下列方程确定的隐函数的极值.

(a)$z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$.

例 4 计算函数 $u=xy^2z^3$ 的满足条件 $x+2y+3z=a,x>0,y>0,z>0$ 的极值.

解:条件极值问题.代入消元法.

代入消去 x,可得 $u=(a-2y-3z)y^2z^3$.分别对变量 y 和 z 求导,得驻点 $y=z=\frac{a}{6}$.再求二阶偏导数,根据极值充分条件,此点为极大值点.于是原问题在点$\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}\right)$取极大值$\left(\frac{a}{6}\right)^6$.

习题

(a)求函数 $u=x^my^nz^p$ 的满足条件 $ax+by+cz=d$ 的极值,其中 m、n、p、a、b、c、d 都是正数.

(b)求函数 $u=\sin x\sin y\sin z$ 的满足条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$,$x>0,y>0,z>0$ 的极值.

(c)求半径等于 R 的圆的面积最大的内接三角形,以及面积最小的外切三角形.

例 5 计算函数 $u=x-2y+2z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大最小值.

解:条件极值问题.拉格朗日乘数法.

令 $L(x,y,z;\lambda)=x-2y+2z+\lambda(1-x^2-y^2-z^2)$,分别对 x、y 和 z 求导,得

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1-2\lambda x=0,\frac{\partial L}{\partial y}=-2-2\lambda y=0,\frac{\partial L}{\partial z}=2-2\lambda z=0$$

用 λ 表示 x、y 和 z,得 $x=\frac{1}{2\lambda}$,$y=-\frac{1}{\lambda}$,$z=\frac{1}{\lambda}$.代入球面方程,得 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$.得到两点

$$\lambda=\frac{3}{2},x=\frac{1}{3},y=-\frac{2}{3},z=\frac{2}{3},u=3.$$

$$\lambda=-\frac{3}{2},x=-\frac{1}{3},y=\frac{2}{3},z=-\frac{2}{3},u=-3.$$

根据问题的几何意义,前者是最大值;后者是最小值.

评述:从拉格朗日函数产生的非线性方程组中,变量 λ 常具有特殊性质.因此,解方程组时,一个常用路线是消去 λ,得到其他变量之间的关系;另一个是用 λ 表示其他变量.最后,都要代入约束条件,得到一元方程.

习题

(a)求函数 $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大最小值.

(b)求函数 $u=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线上的最大最小值.

例 6 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$位于第一卦限的部分上求一点,使得在该点处的切平面与坐标平面围成的四面体的体积最小.

解:几何应用.

设所求点为(X,Y,Z),则切平面方程为$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$.

令 $L(x,y,z;\lambda)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{XYZ}+\lambda(1-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{a^2}-\frac{Z^2}{a^2})$,分别对 X、Y 和 Z 求导,得

$$\frac{\partial L}{\partial X}=-\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{X^2YZ}-\frac{2X\lambda}{a^2}=0;\frac{\partial L}{\partial Y}=-\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{XY^2Z}-\frac{2Y\lambda}{b^2}=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Z}=-\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{XYZ^2}-\frac{2Z\lambda}{c^2}=0.$$

解方程组,得唯一点 $X=\frac{a}{\sqrt{3}},Y=\frac{b}{\sqrt{3}},Z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.所以,切平面与坐标平面围成的四面体的体积的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

习题

(a)长方体有三个面分别在坐标平面上,另一顶点在平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c>0)$上,求长方体的最大体积.

(b)在所有的过点 $M(5,4,3)$,且具有正截距的平面中,求平面,使它的三个截距的和最小.

例 7 求原点到曲面 $xyz=a^3$ 的最短距离.

解:最短距离.

设曲面上任意一点(x,y,z),该点到坐标原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

令 $L(x,y,z;\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xyz-a^3)$.求导,得

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda yz=0,\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda xz=0,\frac{\partial L}{\partial z}=2z+\lambda xy=0.$$

消去 λ,得 $y=\pm x,z=\pm x$.代入曲面方程,得 $x=\pm a$.共有四个极小值点(a,a,a),$(a,-a,-a)$,$(-a,a,-a)$和.$(-a,-a,a)$.最短距离$\sqrt{3}a$.

习题

(a)在曲面 $z=x^2+2y^2$ 上求一点,使得它到平面 $4x+4y+z+12=0$ 的距离最小.

例 8* 设函数 $u=F(x,y,z)$有连续的偏导数.点 $M(a,b,c)$不在由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的曲面上.如果点到曲面上点的最短距离在曲面的内点 $N(x,y,z)$取到,则连线 MN 是曲面的法线.

证:最短距离.

研究距离的平方 $d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ 的最小值,其中 x、y、z 满足方程 $F(x,y,z)=0$.用拉格朗日乘数法.

$$L(x,y,z;\lambda)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\lambda F(x,y,z).$$

分别对 x、y、z 求导,得$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)-\lambda F_x(x,y,z)=0$ 等.消去 λ,得

$$\frac{x-a}{F_x(x,y,z)}=\frac{y-b}{F_y(x,y,z)}=\frac{z-c}{F_z(x,y,z)}.$$

注意到分子是连线的方向向量,而分母是曲面的法向量即得.

习题

(a)设函数 $F(x,y,z)$,$G(x,y,z)$有连续的偏导数,曲面 $F(x,y,z)=0$,$G(x,y,z)=0$ 无公共点.如果两曲面上点的最短距离分别在内点上取到,则这两点之间的连线是两曲面的公共法线.

(b)设 ΔABC 的三个顶点分别在曲线 $L_1:f(x,y)=0$,$L_2:g(x,y)=0$,$L_3:h(x,y)=0$ 上.如果 ΔABC 的面积取得最大值,则曲线在三角形顶点处的切线与三角形中的对边平行.

例 9* 求函数 $z=xy$ 在区域$D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大最小值.

解:有界闭区域上连续函数的最大最小值问题.

最大最小值或者在内点上取到,或者在边界点取到.

内点:分别对 x 和 y 求导,得唯一驻点 $x=y=0$. 相应的函数值 $z=0$.

边界点:令 $L(x,y;\lambda)=xy+\lambda(1-x^2-y^2)$,求导,得 $y-2\lambda x=0$, $x-2\lambda y=0$. 消去 λ,有 $x^2=y^2$. 代入圆的方程,得四个点: $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,此时 $z=\frac{1}{2}$; $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,此时 $z=-\frac{1}{2}$. 比较即可.

习题

(a)求函数 $z=3x+4y+5$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大最小值.

例 10* 求函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$ 与坐标轴围成的区域上的最大最小值.

解:有界闭区域上连续函数的最大最小值问题.

最大最小值或者在内点上取到,或者在边界点取到.

内点:分别对 x 和 y 求导,得唯一驻点 $x=2,y=1$,相应的函数值 $z=4$.

边界点:在直线 $x+y=6$ 上,代入,得令 $z=2x^2(x-6)$. 求导,得驻点(4,2). 相应的函数值 $z=-64$. 在坐标轴 $x=0$ 或 $y=0$ 上, $z=0$.

比较可知,最大值为 4,最小值为 −64.

习题

(a)求函数 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在区域 $D:x+y\geqslant -3, x\leqslant 0, y\leqslant 0$ 上的最大最小值.

(b)求函数 $z=3x^2y-x^3-2y^2$ 在区域 $D:|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大最小值.

例 11* 求 a、b,使定积分 $\int_0^1[x^2-(a+bx)]^2\mathrm{d}x$ 最小.

解:无界区域上函数的最大最小值问题.

积分,得

$$I=\int_0^1[x^2-(a+bx)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}(b^2-2a)+ab+a^2.$$

求导,得 $\frac{\partial I}{\partial a}=2a+b-\frac{2}{3}=0$, $\frac{\partial I}{\partial b}=a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{2}=0$. 解方程组,得函数的唯一驻点 $a=-\frac{1}{6}$, $b=1$. 再求导,得 $A=\frac{\partial^2 I}{\partial a^2}=2$, $B=\frac{\partial^2 I}{\partial a\partial b}=1$, $C=\frac{\partial^2 I}{\partial b^2}=\frac{2}{3}$. 于是 $A>0$, $AC-B^2>0$. 根据极值充分条件,这是极小值点.

根据问题,它也是最小值点,最小值 $\frac{1}{180}$.

习题

(a)求 a、b,使定积分 $\int_0^1[x^n-(a+bx)]^2\mathrm{d}x$ 最小,其中 n 是自然数.

(b)求函数 $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$ 的最小值.

例 12* 计算函数 $z=xye^{-x-y}$ 在第一象限(包括坐标原点和正坐标轴)的最大值.

解:无界区域上函数的最大最小值问题.

内点:将 $z=xye^{-x-y}$ 对 x 和 y 求导,得唯一驻点 $x=y=1$,此时 $z=e^{-2}$.

边界点:当 $x=0$ 或 $y=0$ 时, $z=0$.

极限:因为 $xy<(x+y)^2$,所以当 $x+y\to+\infty$时,$z\to0$.
于是,函数在点 $x=y=1$ 取到最大值 $z=e^{-2}$.

习题

(a)求函数 $z=x^2+4y+\dfrac{2}{xy^2}$在第一象限的最小值.

(b)求函数 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

例 13* 求证:$\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3}\geqslant\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$,$x$、$y$、$z$ 是正数,n 是自然数.

证:用极值证明不等式.

这个问题可以转化为:求函数 $u=x^n+y^n+z^n$ 的满足条件 $x+y+z=3a(a>0)$的最小值.用代入消元法,得 $u=x^n+y^n+(3a-x-y)^n$.求偏导数,得唯一驻点 $x=y=a$.求二阶偏导数可知:$x=y=a$ 是极小值点.因此也是最小值点,最小值等于 $3a^n$.即 $\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3}\geqslant\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$.

习题 求证下列不等式.

(a)$\left(\dfrac{x}{m}\right)^m\left(\dfrac{y}{n}\right)^n\left(\dfrac{z}{p}\right)^p\leqslant\left(\dfrac{x+y+z}{m+n+p}\right)^{m+n+p}$,其中 x、y、z 是正数,m、n、p 是自然数.

(b)$xyz^3\leqslant27\left(\dfrac{x+y+z}{5}\right)^5$,其中 $x>0,y>0,z>0$.

答案与提示

第一节 多元函数的极限与连续

1.(a)$-y<x<y$. (b)$0<x^2+y^2\leqslant4$ 且 $x^2+y^2\neq1$.

2.(a)$f\left(\dfrac{y}{x},1\right)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. (b)$f(x,y)=\dfrac{y^2(1+x)}{1-x}$.

3.(a)等价无穷小代换.0. (b)极限存在准则 1.0.

4.(a)仿本例计算.0. (b)仿本例计算.0.

5.(a)沿直线 $y=kx$. (b)沿直线 $y=kx$.

6.(a)沿曲线 $y=kx^2$. (b)沿曲线 $y=x+kx^2$.

7.(a)用本例与反证法. (b)用定义,取 $\varepsilon=1$.

8.(a)改写,得 $f(x,y)=f\left(\dfrac{1}{3}x,\dfrac{1}{2}y\right)$.仿第一章第五节例 8 习题(b)的证明.

9.(a)在整个平面上连续. (b)在整个平面上除(0,0)外连续.

10.(a)用定义,对于 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L_1+L_2}$.

11.(a)命题:设函数 $f(x)$在全数轴连续,且有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$,则 $f(x)$取到最小值.

(b)令 $g(x,y)=\dfrac{1}{f(x,y)}$,用本例. (c)$f(x,y)>0$ 取到正的最小值.

12.(a)用 D 内连续曲线连接两点. (b)考虑 $F(t)=f(\sin t,\cos t),0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(c)由 $\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,用习题(b)方法.

第二节 偏导数与全微分

1.(a)当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,用公式,得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. 用定义,$f_x(0,0)$ 不存在,$f_y(0,0)=0$.

2.(a)用定义,得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,而极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在. (b)用公式与定义,得 $f_{xy}(0,0)=-1,f_{yx}(0,0)=1$.

3.(a) $a^pb^qe^x\sin\left(y+\dfrac{1}{2}q\pi\right)$. (b) $(-1)^{p+q+1}\left[\dfrac{2p\cdot(p+q)!}{(x+y)^{p+q+1}}-\dfrac{2\cdot(p+q+1)!\ x}{(x+y)^{p+q+2}}\right]$.

4.(a)仿本例证明,用一元函数的微分中值定理. (b)用一元函数的凸凹性. (c)用微积分基本公式.

5.(a)仿本例证明,用连续定义. (b)仿习题(a)证明. (c)仿本例证明,用微积分基本公式.

6.(a)讨论函数的最大最小值, (b)(1)讨论函数的最大最小值. (2)由(1).

7.(a)令 $F(x,y)=f(x,y)e^{-x-y}$,仿本例证明. (b)令 $F(x,y)=xyf(x,y)$,仿本例证明.

8.(a)仿本例证明. (b)仿本节例 5,有 $f(x,y)-f(0,0)=f_x(\xi,y)x+f_y(0,0)y+o(y)$. 再用可微定义.

9.(a)仿本例证明. 用 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$ 等. (b)仿本节例 8 证明可微. 用公式与定义证明偏导数不连续.

第三节 复合函数导数公式

1.(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+y\cos xf_2',\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1'+\sin xf_2'$. (b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2',\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'+xg_2'$.

2.(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^4}f''+\dfrac{2y}{x^3}f'+\dfrac{y^2}{x^3}g'',\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^3}f''-\dfrac{1}{x^2}f'-\dfrac{y}{x^2}g'',\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^2}f''+\dfrac{1}{x}g''$. 代入即可. (b) $f_{12}''+f_{13}''x+f_{32}''e^y+f_{33}''xe^{2y}+f_3'e^y$.

3.(a) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. (b) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. (c) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

4.(a)仿本例证明. 用已知 $f_2'=a^2f_{11}''$.

5.(a)(1)仿本例证明. (2)仿本例证明. (b)仿本例证明.

6.(a) $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}e^u(e^v-e^{-v})$. (b) $\dfrac{\partial z}{\partial \xi}=0$.

7.(a)取 $a=q,b=p$,得 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(r-pq)v=0$. (b)与原方程形式相同.

8.(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(v\cos v-u\sin v)e^{-u},\dfrac{\partial z}{\partial y}=(u\cos v+v\sin v)e^{-u}$.

(b)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{h'_1g'_2-h'_2g'_1}{f'_1g'_2-f'_2g'_1},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f'_1h'_2-f'_2h'_1}{f'_1g'_2-f'_2g'_1}$.

9.(a)$\mathrm{d}z=-\frac{x+yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z+xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x-\frac{y+xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z+xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y$.

(b)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'-2z},\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y^2-yf+zf'}{y(f'-2z)}$.代入即可. (c)$-\frac{z}{xyf'-1}$.

10.(a)用偏导数定义,取增量 $t\Delta x$. (b)仿本例说明. (c)$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m u=n(n-1)\cdots(n-m+1)u$.

11. (a)$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{c[(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2]}{(cy-bz)^3}$,
$\frac{d^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{b[(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2]}{(cy-bz)^3}$. (b) $\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{g''f'-g'f''}{(f')^3},\frac{d^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{h''f'-h'f''}{(f')^3}$.

12.(a)仿本例计算.8. (b)仿本例计算.$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{4}{3}x,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{5}{3}x$.

13.(a)用本例.

14.(a)考虑过点(x,y)的半径与圆周的交点,用本例. (b)用本例和条件可得$\lim\limits_{r\to\infty}f(x,y)=f(0,0)+1$.然后仿本章第一节例 11 证明.

15.(a)用本例展开到一阶,将余项(二阶)配方.

16.(a)考虑从点(0,0)到(4,4),再到(5,4)的折线,用本例. (b)用本例与分部积分法.

第四节 切线与切平面

1.(a)切线方程$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{c}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c}$.

2.(a)方向余弦为 $\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$.

3. (a)切线方程$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$. (b)$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. (c)$x-y=0$.

4.(a)$\left\{0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$. (b)六个点$\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

(c)六个点$\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

5.(a)两个平面 $x+4y+6z=21$ 和 $x+2z=7$. (b)$a=-5,b=-2$. (c)两个平面 $-2x+8y-z=5$ 和 $6x-8y-z=13$.

6.(a)仿本例证明. (b)仿本例证明. (c)命题:曲面 $x^\mu+y^\mu+z^\mu=a^\mu(a>0)$的切平面在三个坐标轴上的截距的 $\mu/(1-\mu)$之和等于常数.

7.(a)法向量 $\vec{n}=\{2x_0F'-a,2y_0F'-b,2z_0F'-c\}$.用共面条件.

8.(a)仿本例证明.曲面在任意点处的切平面平行于一条定直线. (b)仿本例证明.

9.(a)仿本例证明. (b)计算偏导数,代入方程.曲面在任意点处的切平面过一个定点.

10.(a)切平面方程 $z - a\theta_0 = -\dfrac{a\sin\theta_0}{r_0}x + \dfrac{a\cos\theta_0}{r_0}y$. (b)$\dfrac{x-\varphi}{\varphi'_2\chi'_1-\varphi'_1\chi'_2}\Big|_{(u_0,v_0)} = \dfrac{y-\varphi}{\varphi'_2\chi'_1-\varphi'_1\chi'_2}\Big|_{(u_0,v_0)} = -\dfrac{z-\chi}{\varphi'_1\varphi'_2-\varphi'_2\varphi'_1}\Big|_{(u_0,v_0)}$.

11.(a)设交点为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\dfrac{a^2}{b}\sin t\cos t$,则 $\cos\theta=\dfrac{a|\sin 2t|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

12.(a)仿本例证明.

13.(a)$\dfrac{\alpha^2}{a}+\dfrac{\beta^2}{b}+\dfrac{2\gamma}{c}=0$.

第五节 方向导数与梯度

1.(a)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.(a)$2\sqrt{14}$. (b)$\dfrac{17}{3\sqrt{14}}$.

3.(a)用方向导数公式. (b)用方向导数公式. (c)用偏导数与方向导数公式.

4.(a)用方向导数公式与柯西不等式. (b)设 x 轴正向到方向 l_1 和 l_2 的转角分别为 α 和 $\alpha+\varphi$,从方向导数公式消去一个偏导数,再用柯西不等式.

5.(a)用定义计算方向导数. (b)用定义计算方向导数.沿 $y=x^4+x^2$ 趋于原点证明不连续. (c)用公式计算方向导数.

6.(a)用梯度定义. (b)用梯度定义与偏导数公式.

7.(a)$4a+3c=4a-b=0, c<b$.

8.(a)等高线的切线方向为 $\vec{l}=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial y},-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\}\Big|_{(x_0,y_0)}$. (b)仿本章第一节例 11 证明.

9.(a)等高线族的方程为$(2x+y)\cos\alpha+(x+2y)\sin\alpha=C$.

10.(a)令 $F(x,y)=f(x,y)-ax-by$,用本例. (b)令 $F(x,y)=f(x,y)-x^2-3xy$,用本例.

11.(a)$z(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{xy^2}{2}+x+y^2$. (b)令 $\xi=x-at,\eta=x+at$,得$\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$,由本例,原方程的解为 $u=\varphi(x-at)+\varphi(x+at)$. (c)改写,得$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\ln f\right)=0$. $z=\varphi(x)\varphi(y)$.

12.(a)仿本例证明.

13.(a)仿本例证明. (b)仿本例证明.

第六节 多元函数的极值

1.(a)在点$\left(\dfrac{a}{4},\dfrac{a}{4}\right)$取极大值$\dfrac{a^3}{256}$. (b)在点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}},\dfrac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\right)$取极大值 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$,在点$\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}},-\dfrac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\right)$取极小值$-\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$.

2.(a)分别考虑直线 $y=kx$ 与 y 轴. (b)在点$(0,0)$取极大值0,但 $z(5,0)=25$.

3.(a)在点$(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$取极小值 $2\sqrt{2}$,在点$(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$取极大值 $-2\sqrt{2}$.

4.(a)在点$\left(\dfrac{dm}{a(m+n+p)},\dfrac{dn}{b(m+n+p)},\dfrac{dp}{c(m+n+p)}\right)$取极大值 $\left(\dfrac{m}{a}\right)^m\left(\dfrac{n}{b}\right)^n\left(\dfrac{p}{c}\right)^p\left(\dfrac{d}{m+n+p}\right)^{m+n+p}$. (b)在点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$取极大值$\dfrac{1}{8}$. (c)在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$取极大值$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

5.(a)最大值与最小值分别为 $\dfrac{1}{2}\left[(A+C)\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right]$. (b)在点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$,$\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$,$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$取最小值 $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$. 在点$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$,$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$,$\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$取最大值$\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

6.(a)在点$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3}\right)$取极大值$\dfrac{abc}{27}$. (b)平面方程$\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{y}{\sqrt{4}}+\dfrac{z}{\sqrt{3}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}+\sqrt{3}$.

7.(a)在点$(-2,-1,6)$取最小距离$\dfrac{6}{\sqrt{33}}$.

8.(a)仿本例证明法线平行. (b)仿本例证明.

9.(a)在点$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$取最大值 10,在点$\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$取最小值 0.

10.(a)在点$(-1,-1)$取最小值 -1,在点$(0,-3)$与$(-3,0)$取最大值 6.

(b)在点$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$取最小值 $-\dfrac{13}{4}$,在点$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$取最大值$\dfrac{166}{27}$.

11.(a)当 $a=\dfrac{2-2n}{(n+1)(n+2)},b=\dfrac{6n}{(n+1)(n+2)}$时取最小值$\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{4(n^2+n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}$.
(b)在点当$(-1,-2,3)$取最小值 -14.

12.(a)在点$(1,1)$取最小值 $z=7$. (b)在点$(1,1)$取最大值 $z=\dfrac{2}{3}$,在点$(-1,-1)$取最小值 $z=-\dfrac{2}{3}$.

13.(a)用本节例 4 习题(a). (b)在习题(a)中取 $m=n=1,p=3$.

第六章　多元函数积分学

第一节　重积分的定义和性质

例 1　用定义计算二重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是正方形 $0\leqslant x,y\leqslant 1$.

解：用定义求二重积分

被积函数在积分区域连续，二重积分存在，可以用特殊的分割与特殊的取点作积分和.

用直线 $x=\frac{k}{n}, y=\frac{k}{n}, 1\leqslant k<n$ 将区域 D 分成 n^2 个小正方形，在每个小正方形中取右上角点，得积分和

$$S=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\frac{k}{n}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

于是 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\lim_{n\to\infty}S=\frac{1}{4}$.

习题

(a) 用定义计算二重积分 $\iint_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是正方形 $0\leqslant x,y\leqslant 1$.

(b) 用几何意义计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant R^2$.

(c) 设函数 $f(x,y)$ 连续，且满足方程 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ 围成的区域，求 $f(x,y)$.

例 2　设有界闭区域 D 关于 y 轴对称，D_1 是 D 在右半平面的部分. 又设函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且满足 $f(-x,y)=f(x,y)$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

证：用定义研究重积分的性质.

用 y 轴将区域 D 分成两部分，将这两部分分别关于 y 轴对称地分割，对称地取点，得积分和

$$S=\sum_k f(-\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k^{(1)}+\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k^{(2)}.$$

其中第二项是子区域 D_1 上的积分和. 因为 $f(-\xi_k,\eta_k)=f(\xi_k,\eta_k)$，$\Delta\sigma_k^{(1)}=\Delta\sigma_k^{(2)}$，所以 $S=2\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k^{(2)}$. 取极限即可.

评述：重积分的奇偶对称性.

习题

(a) 设有界闭区域 D 关于坐标原点对称，D_1 是 D 在右半平面的部分. 又设函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且满足 $f(-x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(b) 设有界闭区域 D 关于直线 $x=a$ 对称，D_1 是 D 在直线 $x=a$ 右边的部分. 又设函数 $f(x,y)$在 D 上可积，且满足 $f(a-x,y)=f(a+x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

例 3 设有界闭区域 D_1 与 D_2 关于直线 $y=x$ 对称，函数 $z=f(x,y)$在区域 D_1 上连续，则 $\iint_{D_2} f(y,x)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

证：用定义研究重积分的性质.

将 D_1,D_2 这两部分分别关于 $y=x$ 对称地分割，对称地取点，当 $f(x,y)$在 $\Delta\sigma_k^{(1)}$ 中(ξ_k，η_k)取值时得 $f(\xi_k,\eta_k)$，相应的 $f(y,x)$在 $\Delta\sigma_k^{(2)}$ 中(η_k,ξ_k)，取值时也得 $f(\xi_k,\eta_k)$，因为$\Delta\sigma_k^{(1)}=\Delta\sigma_k^{(2)}$，于是

$$\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k^{(2)} = \sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k^{(1)}.$$

其中等式两端分别是子区域 D_1、D_2 上的积分和. 取极限即可.

习题

(a) 设有界闭区域 D 关于直线 $y=x$ 对称. 又设函数 $f(x,y)$在 D 上可积，则 $\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

评述：重积分的轮换对称性.

(b) 设空间有界闭区域 Ω 关于平面 $y=x$ 与 $z=x$ 对称，又函数 $f(x,y,z)$在 Ω 上可积，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(y,z,x)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(z,x,y)\mathrm{d}v$.

例 4 估计三重积分的值：

$I = \iiint_\Omega \dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, a^2+b^2+c^2>R^2$.

解：用重积分的保序性定理证明不等式.

由 $a^2+b^2+c^2>R^2$，根式$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$是球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 上动点(x,y,z)到球外定点(a,b,c)的距离，所以它的最大最小值在球面上取到. 用拉格朗日乘数法可得：根式的最大最小值分别为$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$ 和$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$. 于是，根据重积分的保序性定理，有

$$\frac{4\pi R^3}{3(\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R)}\leqslant I\leqslant\frac{4\pi R^3}{3(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R)}.$$

问题：解释根式的最大最小值的几何意义.

习题

(a) 求证：$\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{R+K}\leqslant\iint_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$，其中 $D: r^2\leqslant x^2+$

$y^2 \leqslant R^2, 0 < K = \sqrt{a^2+b^2} < r < R$.

(b)估计二重积分 $I = \iint_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 的值,其中 D 是正方形 $0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

例 5 比较二重积分 $\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D \ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 的大小,其中闭区域 D 是以(1,0),(1,1),(2,0) 为顶点的三角形.

解:用重积分的保序性定理比较积分的大小.

在闭区域 D 内 $1 \leqslant x+y \leqslant 2$,从而 $0 \leqslant \ln(x+y) \leqslant 1$,因此 $\ln^2(1+x) \leqslant \ln(1+x)$. 根据重积分的保序性,有 $\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D \ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$.

习题

(a)确定二重积分 $I = \iint_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的符号,其中 $D: \frac{1}{2} \leqslant |x|+|y| \leqslant 1$.

例 6 设闭区域 D 在 x 轴和 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$,记 D 的面积为 $A(D)$,又设点 $(\alpha,\beta) \in D$,则 $\left|\iint_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant (b-a)(d-c)A(D)$.

证:用重积分的保序性定理和绝对值不等式.

$$\begin{aligned}\left|\iint_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right| &\leqslant \iint_D |x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant \iint_D (b-a)(d-c)\mathrm{d}\sigma \leqslant (b-a)(d-c)A(D)\end{aligned}$$

习题

(a) 设函数 $f(x,y)$ 在正方形 $0 \leqslant x$、$y \leqslant a$ 上有连续的偏导数,且 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M$,又设 $f(x,y)$ 在正方形的边界上恒等于零,则 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \frac{1}{6}Ma^3$.

(b) 设函数 $f(x,y) \geqslant 0$ 在闭区域 D 上连续,且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$,则在 D 上 $f(x,y) \equiv 0$.

评述:这是重积分的保号性定理的加强形式.

(c)设函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在闭区域 D 上可积,则

$$\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leqslant \iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

评述:这是重积分的施瓦兹不等式. 其实,定积分的许多结果都可以推广到重积分. 将它们逐个检查一遍是有益的.

例7 设闭区域 Ω: $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$,函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,求极限 $\lim\limits_{r \to 0^+} \frac{1}{r^3} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

解:用重积分的中值定理求极限.

因为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,根据重积分中值定理,存在点 $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega$,使得

$$\frac{1}{r^3} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \frac{1}{r^3} f(\xi,\eta,\zeta) \iiint_\Omega \mathrm{d}v = \frac{4\pi}{3} f(\xi,\eta,\zeta).$$

当 $r \to 0+$ 时,点 (ξ, η, ζ) 趋向于坐标原点 $(0,0,0)$. 又因为函数 $f(x, y, z)$ 连续,所以 $\lim\limits_{r \to 0+} \frac{1}{r^3} \iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \frac{4\pi}{3} f(0,0,0)$.

习题

(a)求极限 $\lim\limits_{r \to 0+} \frac{1}{r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x + y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

(b)设函数 $f(x, y)$ 连续,求极限 $\lim\limits_{a \to 0+} \frac{1}{a^2} \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D: |x| + |y| \leqslant a$.

第二节　二重积分的计算

例 1　计算二重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2$ 围成.

解:用直角坐标系,由积分区域决定积分顺序.

先对变量 x 积分.

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^{y} xy\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 (y^3 - \frac{1}{y})\mathrm{d}y = \frac{15}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

习题　计算下列二重积分.

(a) $\iint_D xy(x - y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $y = x, y = -x$ 和 $x = 1$ 围成.

(b) $\iint_D y\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}, y = 0, y = 2$ 和 $x = -2$ 围成.

例 2　计算二重积分 $\iint_D x\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $y = x, y = 0, x = 1$ 围成.

解:用直角坐标系,由被积函数决定积分顺序.

先对变量 y 积分.

$$\iint_D x\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x x\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 (1 - \cos 1)x^2\mathrm{d}x = \frac{1 - \cos 1}{3}.$$

习题　计算下列二重积分.

(a) $\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $y = \sqrt{x}, y = x$ 围成.

(b) $\iint_D e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由曲线 $y = \sqrt{x}, x = 1$ 和 $y = 0$ 围成.

例 3　设函数 $f(x)$ 连续,计算二重积分 $\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)]\mathrm{d}\sigma$,其中闭区域 D 由曲线 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 围成.

解:用奇偶对称性.

用曲线 $y = -x^3$ 将积分区域 D 分成两部分,右上部分 D_1 关于 y 轴对称,左下部分 D_2 关于 x 轴对称. 利用被积函数的奇偶性,有

$$\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D x\mathrm{d}\sigma + \iint_D xyf(x^2 + y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{D_1} x\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} x\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_1} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$= 0 + 2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{-x^3} x\mathrm{d}y + 0 + 0 = -\frac{2}{5}.$$

习题 计算下列二重积分.

(a) $\iint_D \frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由 $x = y^2$ 和 $x = 1+\sqrt{1-y^2}$ 围成.

(b) $\iint_D (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma$,其中 D: $|x|+|y| \leqslant 1$.

(c) $\iint_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D:(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 1$.

例 4 设函数 $f(x)>0$ 连续,计算二重积分 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是圆盘 $x^2+y^2 \leqslant x+y$.

解:用轮换对称性.

积分区域关于直线 $y=x$ 对称,用轮换对称性,有

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\iint_D (a+b)\mathrm{d}\sigma.$$

因为积分区域是半径等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圆盘,所以 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{4}(a+b)$.

习题

(a)计算二重积分 $\iint_D (x^2+xy-y^2)e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 $D:0 \leqslant x,y \leqslant 1$.

(b)设函数 $f(x)>0$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则 $\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma \geqslant (b-a)^2$,其中 D 是正方形 $a \leqslant x,y \leqslant b$.

例 5 计算二重积分 $\iint_D [x+y]\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是正方形 $0 \leqslant x,y \leqslant 1$.

解:被积函数在积分区域上不连续,应分块计算.

用直线 $x+y=1$ 将区域 D 分成两部分.右上部分记作 D_1,左下部分记作 D_2.因为在子区域 D_1 中,$[x+y]=0$,在 D_2 中,$[x+y]=1$,所以

$$\iint_D [x+y]\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} [x+y]\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} [x+y]\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}.$$

习题 计算下列二重积分.

(a) $\iint_D (x+y)\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是正方形 $0 \leqslant x,y \leqslant 1$.

(b) $\iint_D |y-x^2|\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是正方形 $0 \leqslant x,y \leqslant 1$.

(c) $\iint_D \min\{x,y\}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是矩形 $0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

例 6 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上连续,求证:

$\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$,其中 D 是矩形 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$.

证:矩形区域上的积分,化成定积分的乘积.

$$\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x)g(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y.$$

习题

(a)计算二重积分 $\iint_D \frac{\ln(1+x)\ln(1+y)}{1+x+y+xy}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是正方形 $0\leqslant x,y\leqslant 1$.

例 7* 设函数 $f(x,y)$在正方形 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,且满足 $f(x,0)=f(0,y)=0$,则 $\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|\leqslant \iint_D \left|f_{xy}(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma$.

证:矩形区域上的积分,用微积分基本公式.

因为 $f(x,y)$在正方形 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$ 上连续,所以存在$(x_0,y_0)\in D$,使得$|f(x_0,y_0)|=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$.另一方面,有

$$\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{y_0}f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}[f_x(x,y_0)-f_x(x,0)]\mathrm{d}x$$
$$= f(x_0,y_0)-f(0,y_0)-f(x_0,0)+f(0,0)=f(x_0,y_0).$$

于是

$$\left|f(x_0,y_0)\right| = \left|\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{y_0}f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{y_0}\left|f_{xy}(x,y)\right|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left|f_{xy}(x,y)\right|\mathrm{d}y.$$

习题

(a)设函数 $f(x,y)$在正方形 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,且满足 $f(x,0)=f(0,y)=0$,则存在常数 $K>0$,使得$|f(x,y)|\leqslant Kxy$.

(b)设函数 $f(x,y)$在正方形 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,且满足 $f(x,0)=f(0,y)=0$,则 $\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D f_{xy}^2(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

例 8* 设函数 $f(x,y)$在矩形 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有连续的二阶偏导数,且 $f(a,y)=f(x,c)=0$,则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (b-x)(d-y)f_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证:矩形区域上的积分,对内层积分用定积分的分部积分公式.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$= \int_c^d\left(-(b-x)f(x,y)\Big|_a^b + \int_a^b(b-x)f_x(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d(b-x)f_x(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b\left(-(b-x)(d-y)f_x(x,y)\Big|_c^d + \int_c^d(b-x)(d-y)f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \iint_D(b-x)(d-y)f_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

习题

(a)设函数 $f(x,y)$在矩形 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上有连续的二阶偏导数,且 $f(a,y)=f(x,c)=0,|f_{xy}(x,y)|\leqslant M$,则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2(d-c)^2$.

(b)设函数 $f(x,y)$在正方形 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$ 上有连续的四阶偏导数,且 $f(x,0)=f(x,1)=0,f(0,y)=f(1,y)=0,|f_{x^2y^2}(x,y)|\leqslant M$,则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{M}{144}$.

例 9 计算二重积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y$.

解:三角形区域上的积分,交换积分顺序.

因为被积函数的原函数不是初等函数,无法先对变量 y 积分,必须交换积分顺序.

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 ye^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

习题

(a)设函数 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,求定积分$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

(b)设函数 $f(x)=\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$,求定积分$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

例 10 设函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导函数,求证:

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{f'(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\pi[f(a)-f(0)].$$

证: 三角形区域上的积分,交换积分顺序.

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{f'(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a\frac{f'(y)\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$
$$=\int_0^a f'(y)\pi\mathrm{d}y=\pi[f(a)-f(0)].$$

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上连续,则$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\int_0^a(a-y)f(y)\mathrm{d}y$.

(b)设函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上连续,则 $2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

例 11 交换积分顺序以化简二重积分:$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解:交换积分顺序.

作图,易见 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

习题

(a)交换积分顺序以化简二重积分:$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

例 12 计算二重积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

解:交换积分顺序.

作图,交换积分顺序.

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^3.$$

习题 求下列二重积分.

(a) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

例 13 计算二重积分 $\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2ay,y\leqslant x$.

解:用极坐标系计算二重积分.

观察积分区域和被积函数,决定用极坐标系.

$$\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\frac{rdr}{r\sqrt{4a^2-r^2}}=\frac{\pi^2}{32}.$$

习题 计算下列二重积分

(a) $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

(b) $\iint_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2x,f(x,y)=\begin{cases}x^2y,0\leqslant y\leqslant x\\0,其他\end{cases}$.

例 14 计算二重积分 $\iint_D(x^2+y^2)d\sigma$,其中 D 是由双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成区域的位于右半平面的部分.

解:用极坐标系计算二重积分.

观察积分区域和被积函数,决定用极坐标系.

$$\iint_D(x^2+y^2)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos2\theta}}r^3dr=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos4\theta)d\theta=\frac{\pi a^4}{16}.$$

习题

(a) $\iint_D(x+y)d\sigma$,其中 D 是由心脏线 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 围成区域.

(b) 计算二重积分 $\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)d\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$.

例 15 将 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$ 化为极坐标的二次积分.

解:两个二次积分所对应的重积分的积分区域分别是

$$D_1:0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2},D_2:1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}.$$

两者的并集是环形区域 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,1\leqslant r\leqslant 2$. 在第一象限的部分. 于是

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r.$$

习题 将下列直角坐标的二次积分化为极坐标的二次积分.

(a) $\int_0^{2R} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(b) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} \mathrm{d}x \int_0^{Rx} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}y$.

例 16 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,求证: $\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma = 2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$,其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$.

证:用极坐标系.证明二重积分的等式或不等式.

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r) r \mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,区域 $D: x^2+y^2 \leqslant x, |y| \leqslant x$,求证: $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\tan\theta)\cos^2\theta \mathrm{d}\theta$.

(b)求证: $\frac{61}{165}\pi \leqslant \iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{2}{5}\pi$,其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$.

(c)设函数 $f(x,y)$ 在圆盘 $x^2+y^2 \leqslant R^2$ 上有连续的偏导数,且 $|\mathrm{grad}f| \leqslant M$,又设 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上恒等于零,则 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \frac{\pi}{3}MR^3$.

例 17 设函数 $f(x,y)$ 在单位圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 上有连续的偏导数,在圆周 $x^2+y^2=1$ 上恒等于零,计算极限 $\lim\limits_{c\to 0+}\iint_D \frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 $D: c^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$.

解:用极坐标系.求二重积分的极限或导数.

记 $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r,\theta)$,根据复合函数导数公式,有

$$\frac{\partial F}{\partial r} = f_x\frac{\partial x}{\partial r} + f_y\frac{\partial y}{\partial r} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta.$$

于是, $xf_x + yf_y = r\frac{\partial F}{\partial r}$.代入,得

$$\lim_{c\to 0+}\iint_D \frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \lim_{c\to 0+}\int_0^{2\pi} d\theta \int_c^1 \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} r \mathrm{d}r$$

$$= \lim_{c\to 0+}\int_0^{2\pi}[F(1,\theta) - F(c,\theta)]\mathrm{d}\theta = -\lim_{c\to 0+}\int_0^{2\pi} F(c,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

因为 $F(c,\theta)$ 连续,用定积分中值定理,得

$$\text{原式} = -\lim_{c\to 0+} 2\pi F(c,\theta^*) = -2\pi F(0,\theta^*) = -2\pi f(0,0).$$

评述:证明重积分的极限,基本方法有两个:用定积分的中值定理和化定积分为累次积分.

习题

(a)求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\iint_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D: t^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

(b)求极限$\lim\limits_{R\to +\infty}\iint_D (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2\leqslant R^2$.

例 18 设函数$f(x)$可微,且$f(0)=0$,求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{t^3}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2\leqslant t^2$.

解:用极坐标系.求二重积分的极限或导数.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r)r\mathrm{d}r = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\cdot 2\pi\int_0^t f(r)r\mathrm{d}r$$

由罗必塔法则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma = \lim_{t\to 0+}\frac{2\pi t f(t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0+}\frac{2\pi f(t)}{3t} = \frac{2}{3}\pi f'(0).$$

习题

(a)设函数$f(x)$连续,且$f(0)=1$.令$F(t)=\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2\leqslant t^2$,求$F''(0)$.

(b)设函数$f(x)$连续,求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2\leqslant t^2$.

例 19* 计算二重积分$\iint_D \dfrac{2x+y}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}\sigma$,其中$D$由曲线$y^2=2x, x+y=4, x+y=12$围成.

解:用换元法计算二重积分.

令$u=\dfrac{y}{\sqrt{x}}, v=x+y$.这个变换将区域$D$变成$uov$平面上的矩形$-\sqrt{2}\leqslant u\leqslant\sqrt{2}, 4\leqslant v\leqslant 12$,雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{2x\sqrt{x}}{y+2x}.$$

代入公式,得

$$\iint_D \frac{2x+y}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}\sigma = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\int_4^{12}2\mathrm{d}v = 32\sqrt{2}.$$

习题 计算下列二重积分.

(a) $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D$由曲线$xy=1, xy=2, y=x, y=4x$围成.

(b) $\iint_D \dfrac{x-y}{xy}\mathrm{d}\sigma$,其中$D$由曲线$xy=1, xy=2, y-x=1, y-x=-1$围成.

(c) $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 由直线 $x+y=1$ 与坐标轴围成.

例 20* 设函数 $f(x)$ 是连续的偶函数,则 $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} f(y-x)\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^a (2a-u)f(u)\mathrm{d}u$.

证: 用换元法证明等式.

令 $x=v, y=u+v$. 这个变换将积分区域变成 uov 平面上的平行四边形 $-a\leqslant v\leqslant a$, $-a\leqslant u+v\leqslant a$,雅可比行列式为 $J=-1$. 代入公式,得

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} f(y-x)\mathrm{d}\sigma = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}v\int_{-a-v}^{a-v} f(u)\mathrm{d}u.$$

因为 uov 平面上积分区域关于坐标原点对称,而被积函数 $F(x,y)=f(x)$ 满足 $F(-x,-y)=f(-x)=f(x)=F(x,y)$,于是

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}v\int_{-a-v}^{a-v} f(u)\mathrm{d}u &= 2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}v\int_0^{a-v} f(u)\mathrm{d}u = 2\int_0^a \mathrm{d}u\int_{-a}^{a-u} f(u)\mathrm{d}v \\ &= 2\int_0^a (2a-u)f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 在区域 $D: |x|\leqslant\frac{A}{2}, |y|\leqslant\frac{A}{2}$ 上连续,则

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}\sigma = \int_{-A}^{A}(A-|t|)f(t)\mathrm{d}t.$$

(b) 设函数 $f(x)$ 在区域 $D: |x|+|y|\leqslant 1$ 上连续,则 $\iint_D f(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$.

(c) 设函数 $f(x)$ 在区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续,求证:

$$\iint_D f(ax+by+c)\mathrm{d}\sigma = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\, f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}t.$$

第三节 三重积分的计算

例 1 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+y+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面围成.

解: 用直角坐标系计算三重积分.

先对变量 z 积分,

$$\iiint_\Omega (x+y+z)\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_\Omega e^{x+y+z}\mathrm{d}v$,其中 Ω 由平面, $z=-x, z=0, y=-x, y=1$ 和 $x=0$ 围成.

(b) $\iiint_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}v$,其中 Ω 由曲面 $z=xy, y=x, x=1$ 和 $z=0$ 围成.

例 2* 设函数 $f(x)$连续,求证:$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)dz$.

证:交换积分次序.

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz = \int_0^a dx\int_0^x dz\int_z^x f(z)dy = \int_0^a dx\int_0^x (x-z)f(z)dz$$

$$= \int_0^a dz\int_z^a (x-z)f(z)dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)dz.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$连续,求证:$\int_0^a x dx\int_0^x y dy\int_0^y f(z)dz = \frac{1}{8}\int_0^a (a^2-z^2)^2 f(z)dz$.

(b)设函数 $f(x)$连续,求证:$\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy\int_0^y f(z)dz = \frac{1}{3!}\left(\int_0^a f(z)dz\right)^3$.

(c)求三重积分 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}dz$.

例 3 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2 dv$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

解:因为被积函数只与变量 z 有关,先作关于变量 x 和 y 的二重积分.

记水平截面在 xOy 平面上的投影为 D_z. 两个曲面的交线在平面 $z=\frac{R}{2}$上. 在这个平面之上,D_z 是圆 $x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2$;在这个平面之下,$D_z$ 是圆 $x^2+y^2 \leqslant R^2-2Rz$,于是

$$\iiint_\Omega z^2 dv = \int_0^R dz\iint_{D_z} z^2 d\sigma = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\pi(R^2-2Rz)dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2\pi(R^2-z^2)dz = \frac{13}{120}\pi R^5.$$

习题

(a)计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2 dv$,其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, -1 \leqslant z \leqslant 1$.

例 4 设函数 $f(x)$在区间$[0,r]$上连续,区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2r^2, x^2+y^2 \geqslant z^2, z \geqslant 0$,求证:$\iiint_\Omega f(z)dv = 2\pi\int_0^r (r^2-z^2)f(z)dz$.

解:因为被积函数只与变量 z 有关,先作关于变量 x 和 y 的二重积分.

记水平截面在 xOy 平面上的投影为 $D_z: z^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2r^2-z^2$;于是

$$\iiint_\Omega f(z)dv = \int_0^r dz\iint_{D_z} f(z)d\sigma = \int_0^r \pi(2r^2-z^2-z^2)f(z)dz$$

$$= 2\pi\int_0^r (r^2-z^2)f(z)dz.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间$[0,r]$上连续,区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2r^2, x^2+y^2 \geqslant z^2, z \geqslant 0$,求证:

(1) 求极限 $\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^3}\iiint_\Omega f(z)dv$.

(2) 又设 $f(x)$在点 $x=0$ 可导,且 $f(0)=0$,求极限 $\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^4}\iiint_\Omega f(z)dv$.

例 5 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, x^2+y^2 \leqslant 3z$.

解:用柱坐标系计算.先对变量 z 积分.

两个曲面的交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2=3$,于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r\mathrm{d}r \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z\mathrm{d}z = \frac{13}{4}\pi.$$

习题 求下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z+1$.

(b) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由 yOz 平面上的曲线 $y^2=2z$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面与平面 $z=4$ 围成的立体.

(c) $\iiint_{\Omega} |z-\sqrt{x^2+y^2}|\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

例 6* 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2$.

解:用柱坐标系计算.先对变量 r 积分.

两个曲面的交线在平面 $z=1$ 上,于是

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} r^2 r\mathrm{d}r = \frac{19}{15}\pi.$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, -1 \leqslant z \leqslant 1$.

(b) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z, x=0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面与平面 $z=2, z=8$ 围成的立体.

(c) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{1-r} e^{-(1-z)^2}\mathrm{d}z$.

例 7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,区域 Ω 由曲面 $x^2+y^2=z^2$ 和平面 $z=1$ 围成.求证: $\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}v = 2\pi\int_0^1 r(1-r)f(r)\mathrm{d}r$.

证:用柱坐标系证明.

用柱坐标系,先对变量 z 积分,有

$$\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_r^1 f(r)\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 r(1-r)f(r)\mathrm{d}r.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$ 连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$,其中区域 $\Omega: x^2+y^2 \leqslant t^2, 0 \leqslant z \leqslant h$,求导数 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 与极限 $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{F(x)}{t^2}$.

例 8 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\mathrm{d}v$，其中 Ω: $\sqrt{3(x^2+y^2)}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解: 用球坐标系计算三重积分.

两个曲面的交线在圆锥面 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{1}{6}(2-\sqrt{3})\pi R^6.$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega}z^2(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω: $x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 3z^2$.

例 9 设函数 $f(x)$ 连续，求极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω: $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$.

解: 用球坐标系求极限.

用球坐标系，先对变量 r 积分，有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^3}=\lim_{t\to 0+}\frac{2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f(t^2)t^2}{3t^2}=\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})\pi f(0).$$

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 连续，在坐标原点可导，且 $f(0)=0$，计算极限 $\lim\limits_{r\to 0+}\frac{1}{r^4}\iiint_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$，其中 Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

(b) 设函数 $f(x)$ 连续，求证：$\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=(2-\sqrt{2})\pi\int_1^2 r^2f(r^2)\mathrm{d}r$，其中 Ω: $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}, 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

例 10 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}v$，其中 Ω: $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

解: 用轮换对称性计算三重积分.

因为积分区域关于平面 $z=x$ 和 $z=y$ 都对称，于是

$$\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}x^2\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}y^2\mathrm{d}v.$$

从而

$$\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{124}{15}\pi.$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}v$,其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=R^2$ 和 $z=0$ 围成.

(b) $\iiint_{\Omega}(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \leqslant 0$.

例 11 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \leqslant 0, y \leqslant 0, z \leqslant 0$.

解:用轮换对称性计算三重积分.

因为积分区域关于平面 $z=x$ 和 $z=y$ 都对称,于是

$$\iiint_{\Omega} z \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} x \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} y \mathrm{d}v .$$

从而

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v = 3\iiint_{\Omega} z \mathrm{d}v = 3\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r\cos\varphi r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = -\frac{3}{16}\pi R^4.$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

(b) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z^2}{c^2}, 0 \leqslant z \leqslant c$.

例 12* 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}v$,其中 Ω 由曲面 $z=ay^2, z=by^2,(y>0, 0<a<b)$, $z=cx, z=dx(0<c<d), z=h(h>0)$ 围成.

解:用换元法计算三重积分.

令 $u=\frac{z}{y^2}, v=\frac{z}{x}, w=z$. 这个变换将积分区域变成 uvw 空间中的长方体 $a \leqslant u \leqslant b, c \leqslant v \leqslant d, 0 \leqslant w \leqslant h$. 雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{w^{3/2}}{2u^{3/2}v^2}.$$

代入公式,得

$$\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}u \int_c^d \mathrm{d}v \int_0^h \frac{w^2}{v^2} \frac{w^{3/2}}{2u^{3/2}v^2} \mathrm{d}w = \frac{2}{27} h^{9/2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{d^3}\right).$$

习题 计算下列三重积分.

(a) $\iiint_{\Omega} x^2 y^2 z \mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{a}, z=\frac{x^2+y^2}{b}(0<a<b), xy=c$, $xy=d(0<c<d), y=px, y=qx(0<p<q)$ 围成的立体.

第四节 曲线积分的性质与计算

例 1 设 L 是关于 y 轴对称的光滑曲线. L_1是它的位于右半平面的部分. 又设函数 $f(x,y)$

在 L 上连续,且 $f(-x,y)=f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

证:用定义研究性质.

首先用 L 与 y 轴的交点将 L 分成两段,然后分别将这两段关于 y 轴对称地分割,对称地取点,积分和为

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(-\xi_k,\eta_k)\Delta s_k^{(1)}+\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k^{(2)}.$$

因为 $f(-\xi_k,\eta_k)=f(\xi_k,\eta_k)$,$\Delta s_k^{(1)}=\Delta s_k^{(2)}$,所以 $S=2\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k^{(2)}$.取极限即得.

评述:对弧长的曲线积分的奇偶对称性.

习题

(a)如果 $f(x,y)$是关于 x 的奇函数,情况如何?

(b)设 L 是关于直线 $y=x$ 对称的分段光滑曲线,函数 $f(x,y)$在 L 上连续,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s$.

评述:对弧长的曲线积分的轮换对称性.

例 2 估计曲线积分 $\int_L e^{x+y}\mathrm{d}s$ 的值,其中是圆周 $x^2+y^2=R^2$ 在第一象限的部分.

解:用保号性定理证明不等式.

由于函数 e^u 单调增加,只需考虑函数 $z=x+y$ 在这四分之一圆周上的最大最小值.这是条件极值问题.用拉格朗日乘数法可得:$x+y$ 在这四分之一圆周上的最大最小值分别为$\sqrt{2}R$ 和R,于是

$$\frac{\pi}{2}Re^R\leqslant\int_L e^{x+y}\mathrm{d}s\leqslant\frac{\pi}{2}Re^{\sqrt{2}R}.$$

习题

(a)设 L 是光滑曲线,长度等于 l.函数 $f(x,y)$在 L 上连续,则存在$(\xi,\eta)\in L$,使得 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = f(\xi,\eta)\cdot l$.

(b)设函数 $f(x,y)$在单位圆的内部连续,求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$,其中 $L:x^2+y^2=t^2$.

评述:两种曲线积分都可以看作定积分的推广,因此,定积分的许多结果可以推广到曲线积分.

例 3 计算曲线积分 $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 是$y=|1-x|-x,0\leqslant x\leqslant 2$.

解:曲线参数化.

曲线 L 是一条折线.要分段计算.以 x 为参数.

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1(x+1-2x)\sqrt{5}\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

习题

(a)求曲线积分$\int_L x^2 \mathrm{d}s$,其中 L 是$y = \ln x, 1 \leqslant x \leqslant 2$.

(b)求极限$\lim\limits_{t \to +\infty} \int_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2 + xy + y^2)^{3/2}}$,其中 L 是$x^2 + y^2 = t^2$ 的正向.

例 4 计算曲线积分$\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$,其中 Γ 是曲面$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ 与 $x + z = 1$ 的交线.

解:代入化简被积函数.

曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$和 $x + y = 1$ 的交线是一个圆.坐标原点到平面 $x + z = 1$ 的距离等于$\frac{|0+0-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,于是这个圆的半径等于$\sqrt{\frac{9}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$,周长等于 4π.又因为曲线 Γ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$和 $x + z = 1$ 的交线,所以 Γ 上所有点满足球面方程.代入,得

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s = \int_\Gamma \frac{9}{2}\mathrm{d}s = 18\pi.$$

评述:如果积分区域上所有的点的坐标都满足某个方程,则可以将这个方程代入被积函数.曲线积分是如此,曲面积分也是如此.

习题 计算下列曲线积分.

(a)$\int_L (x + y)\mathrm{d}s$,其中 L 是以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.

(b)$\int_L \cos\sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s$,其中 L 是由$x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x$ 所确定的区域的边界.

例 5 计算曲线积分$\int_L |y|\mathrm{d}s$,其中 L 是双纽线$r^2 = a\cos 2\theta$.

解:曲线参数化.奇偶对称性.

选极角为参数.利用奇偶对称性.计算在第一象限的部分,则$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{\frac{a}{\cos 2\theta}}$,代入公式,得

$$\int_L |y|\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{\frac{a}{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = (4 - 2\sqrt{2})a.$$

习题 计算下列曲线积分.

(a)$\int_L xy\mathrm{d}s$,其中 L 是抛物线$y^2 = x$ 上从点$A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

(b)$\int_L |xy|\mathrm{d}s$,其中 L 是椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(c)$\int_L (x^{4/3} + y^{4/3})\mathrm{d}s$,其中 L 是内摆线$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

例 6 计算曲线积分$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$,其中 Γ 是曲面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线.

解:轮换对称性.代入化简被积函数.

因为曲线 Γ 关于平面 $y=x$ 及 $z=x$ 都对称，所以

$$\int_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_\Gamma (x^2+y)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=1$ 的交线.

例 7 设分段光滑曲线 $y=y(x)$ 关于 y 轴对称，将它从左到右定向记作 L. L_1 是它位于右半平面的部分. 又设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，且满足 $P(-x,y)=P(x,y)$，$Q(-x,y)=Q(x,y)$，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$，$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$.

评述：对坐标的曲线积分的奇偶对称性.

证：用曲线积分定义研究曲线积分性质.

首先用 L 与 y 轴的交点将 L 分成两段，L_1 是它位于右半平面的部分，然后分别将这两段关于 y 轴对称地分割，对称地取点，积分和为

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} P(-\xi_k,\eta_k)\Delta x_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k^{(2)}.$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} Q(-\xi_k,\eta_k)\Delta y_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k^{(2)}.$$

因为 $P(-\xi_k,\eta_k)=P(\xi_k,\eta_k)$，$\Delta x_k^{(1)}=\Delta x_k^{(2)}$，$Q(-\xi_k,\eta_k)=Q(\xi_k,\eta_k)$，$\Delta y_k^{(1)}=-\Delta y_k^{(2)}$，所以

$$S_1 = 2\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k^{(2)};\ S_2=0.$$

取极限即得 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 2\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x$，$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$.

习题

(a)如果 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是关于 x 的奇函数，情况如何？

命题：设 L 是关于 y 轴对称的光滑曲线. L_1 是它位于右半平面的部分. 函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，且满足 $P(-x,y)=-P(x,y)$，$Q(-x,y)=-Q(x,y)$，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0$，$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 2\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$.

例 8 设 L 是光滑曲线，长度等于 l. 又设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_L \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant l\cdot \max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

证：用保号性定理证明不等式.

$$\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| = \left|\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant \int_L |P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta|\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_L \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\int_L \mathrm{d}s \leqslant l\cdot \max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

习题

(a)设函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$在单位圆的内部连续,求极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,其中 L 是 $x^2+y^2=t^2$ 的正向.

例 9 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正向.

解:曲线参数化.

将 $x=a\cos t$,$y=a\sin t$ 代入,得

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}-\mathrm{d}t=-2\pi.$$

习题

(a)计算曲线积分 $\int_L e^{y^2}\sin 2x\mathrm{d}x+e^{\sin x}\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的一段弧.

(b)求 $a>0$,使得曲线积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 最小,其中 L 是曲线 $y=a\sin x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的一段弧.

(c)设函数 $f(x)>0$ 连续,求证:$\int_L xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2$,其中 L 是正方形 $0\leqslant x,y\leqslant 1$ 的正向边界.

例 10 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$,其中 L 是由曲线 $L_1: y=x^2-2$ 和 $L_2: y=\sqrt{2-x^2}$ 围成的区域的边界的正向.

解:曲线参数化.奇偶对称性.

不考虑方向,曲线 L 关于 y 轴对称,被积函数关于变量 y 是偶函数,用奇偶对称性,有 $\int_L \dfrac{\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=0$.被积函数关于变量 x 是偶函数,曲线 L_1 和 L_2 在右半平面的部分分别记作 L_1^+ 和 L_2^+,则

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=2\int_{L_1^+}\frac{\mathrm{d}x}{|x|+|y|}+2\int_{L_2^+}\frac{\mathrm{d}x}{|x|+|y|}.$$

两段曲线具有不同的表达式,需分别计算.计算在 L_1^+ 上的积分时,以 x 为参数;计算在 L_2^+ 上的积分时,以极角为参数.代入公式,得

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x+2-x^2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sqrt{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}=\frac{2}{3}\ln(4+3\sqrt{2})-\frac{\pi}{2}.$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_L \frac{2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$，其中 L 是以点 (a,b)、$(-a,b)$、$(-a,-b)$、$(a,-b)$ 为顶点的矩形的边界的正向.

例 11 计算曲线积分 $\int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线中 $z \geqslant 0$ 的一支，从球的外侧看是逆时针方向.

解：空间曲线上的曲线积分.

参数化 $x^2 + y^2 = ax$，得 $x = a\cos^2\theta$，$y = a\cos\theta\sin\theta$. 代入球面方程，得 $z = a|\sin\theta|$. 代入公式，得

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\theta\sin^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta) + a^2\sin^2\theta\, a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a^2\cos^4\theta\, a\cos\theta]\\ &d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0[a^2\cos^2\theta\sin^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta) +\\ &a^2\sin^2\theta\, a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a^2\cos^4\theta(-a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{4}\pi a^3.\end{aligned}$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$，其中 Γ 是从点 (a_1,b_1,c_1) 到点 (a_2,b_2,c_2) 的直线段.

(b) $\int_\Gamma y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = \frac{1}{2}$ 的交线，从 z 轴的正向看是逆时针方向.

第五节 格林公式

例 1 计算曲线积分 $\int_L \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是由曲线 $x^2 + y^2 = 2y$，$x^2 + y^2 = 4y$，$x = \sqrt{3}y$，$y = \sqrt{3}x$ 围成区域 D 的正向边界.

解：用格林公式计算.

根据格林公式，有

$$\int_L \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = \iint_D 2x\mathrm{d}\sigma.$$

用二重积分的换元法. 令 $u = \frac{x^2 + y^2}{y}$，$v = \frac{y}{x}$，则区域 D 变成 uov 平面上的矩形 $2 \leqslant u \leqslant 4$，$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant v \leqslant \sqrt{3}$. 雅可比行列式，$J = \frac{uv^2}{(1+v^2)^2}$ 代入公式，得

$$\iint_D 2x\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}v\int_2^4 \frac{2uv}{1+v^2}\,\frac{uv^2}{(1+v^2)^2}\mathrm{d}u = \frac{14}{3}.$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}$,其中 L 是由曲线 $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$ 围成的区域的正向边界.

(b) $\int_L e^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$,其中 L 是区域 $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \sin x$ 的正向边界.

例 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上有连续导数,其中 L 是由曲线 $xy=1$, $xy=4$, $y=x$, $y=4x$ 围成的区域的正向边界,求证: $\int_L \frac{1}{y}f(xy)\mathrm{d}y=[f(4)-f(1)]\ln 2$.

证:用格林公式.

设 L 围成的区域为 D. 根据格林公式,有 $\int_L \frac{1}{y}f(xy)\mathrm{d}y=\iint_D f'(xy)\mathrm{d}\sigma$.

用二重积分换元法. 令 $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$,有

$$\iint_D f'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}\frac{f'(u)}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4\mathrm{d}v\int_1^4\frac{f'(u)}{2v}\mathrm{d}u=[f(4)-f(1)]\ln 2.$$

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数, L 是正向光滑简单闭曲线,围成区域 D,求曲线积分 $\int_L [f(y)e^x-my]\mathrm{d}x+[f'(y)e^x-m]\mathrm{d}y$.

例 3 计算曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(2\pi,0)$ 的弧.

解:添加一段弧成闭路,用格林公式计算.

添加 x 轴上从点 $(2\pi,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的直线段,记它们共同围成的区域为 D,用格林公式,得

$$\begin{aligned}&\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}\sigma-\int_{2\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{4}{9}+\frac{3}{2}\pi^2.\end{aligned}$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_L (e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 上从点 $(2a,0)$ 到点 $(0,0)$ 的弧.

(b) $\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+[ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $x^2+y^2=a^2$ 上从点 $(0,a)$ 到点 $(0,-a)$ 的弧.

(c) $\int_L (2+y)\mathrm{d}x+(4xy+x)\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sqrt{\cos x}$ 上从点 $(0,1)$ 到点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的弧.

例 4 计算曲线积分 $\int_L \frac{(e^x-y^3)\mathrm{d}x+(x^3+\sin y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 $L: x^2+y^2=R^2$ 的正向.

解:化简被积函数,用格林公式计算.

因为被积函数在原点没有定义,不能直接用格林公式.将曲线方程代入被积函数的分母,得

$$\int_L \frac{(e^x - y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{R^2}\int_L (e^x - y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\mathrm{d}y.$$

这时可以使用格林公式了.记 $D: x^2 + y^2 = R^2$,则

$$\frac{1}{R^2}\int_L (e^x - y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\mathrm{d}y = \frac{1}{R^2}\iint_D (3x^2 + 3y^2)\mathrm{d}\sigma = \frac{3}{2}\pi R^2.$$

习题

(a)计算曲线积分 $\int_L \frac{e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x - e^x(y - \sin y)\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$,其中 $L: |x|+|y| = 1$ 的正向.

例 5 设函数 $f(x)>0$ 有连续的偏导数,求证:$\int_L^x f(y)\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi$,其中 L 是圆周 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ 的正向.

证:用格林公式证明不等式.

用格林公式,有 $\int_L xf(y)\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x = \iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma$.

因为区域 D 关于直线 $y = x$ 对称,用轮换对称性,有

$$\iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma = \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}\sigma \geqslant 2\iint_D \mathrm{d}\sigma = 2\pi.$$

习题

(a)求证:$\int_L y^3\mathrm{d}x + (3x - x^3)\mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{2}\pi$,其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的正向.

(b)求证:$\frac{\pi}{2} < \int_L -y\sin x^2\mathrm{d}x + x\cos y^2\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 + x + y = 0$ 的正向.

例 6 求极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t^2}\int_L (ax + by)\mathrm{d}x + (mx + ny)\mathrm{d}y$,其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = t^2$ 的正向.

解:用格林公式求极限.

设 L 围成的区域为 D,根据格林公式,有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^2}\int_L (ax + by)\mathrm{d}x + (mx + ny)\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^2}\iint_D (m - b)\mathrm{d}\sigma$$
$$= \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^2}\pi(m-b)t^2 = \pi(m-b).$$

习题

(a)求极限 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_L [e^{y^2-x^2}\cos(2xy) - y^2]\mathrm{d}x + e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是以点 $(0,0)$、$(a,0)$、$\left(a,\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)$,$\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)$ 为顶点的矩形的正向边界.

例 7　设函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在区域 D 及其正向边界 L 上有连续的一阶偏导数,则 $\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}\sigma = \int_L uv\mathrm{d}y - \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}\sigma$.

证:用格林公式证明恒等式.

根据问题中的条件,函数 u、v 有连续的一阶偏导数.用格林公式,有

$$\int_L uv\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(uv)\mathrm{d}\sigma = \iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}\sigma + \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}\sigma.$$

评述:这个命题可以看作二重积分的分部积分公式.当然还有另外一个等式 $\iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}\sigma = -\int_L uv\mathrm{d}x - \iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}\sigma$,或者将这两个等式相加而得第三个等式

$$\iint_D v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_L uv(\mathrm{d}y - \mathrm{d}x) - \iint_D u\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

习题

(a)设函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 和 $z(x,y)$ 在区域 D 及其正向边界 L 上有连续的一阶偏导数,则 $\iint_D\left(u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_L uz\mathrm{d}y - vz\mathrm{d}x - \iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)z\mathrm{d}\sigma$.

(b)设函数 $z(x,y)$ 在区域 D 及其正向边界 L 上有连续的二阶偏导数,则 $\iint_D\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_L \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\right) - \iint_D \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$.

(c)设函数 $z(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$,求证:$\iint_D\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{2e}$.

例 8　设函数 $f(x)$ 有连续导数,则曲线积分 $\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$ 与路径无关.

证:用曲线积分与路径无关的条件.

计算可得,$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf'(x^2+y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}$,满足曲线积分与路径无关的条件.

习题

(a)设函数 $f(x)$ 有连续导数,又 L 是任意分段光滑简单闭曲线,求证:曲线积分 $\int_L f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = 0$.

例 9　求函数 $p(x)$,使得曲线积分 $\int_L [e^y + xp(y)]\mathrm{d}x + (xe^y + x^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

解:用曲线积分与路径无关的条件.

根据曲线积分与路径无关的条件,有 $e^y + 2x = e^y + xp'(y)$,即 $p'(y) = 2$.积分,得 $p(y) = 2y + C$.

习题

(a)设函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $f(0)=0$.又设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + yf(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,求 $f(x)$.

(b)设函数 $Q(x,y)$在 xOy 平面上有连续的偏导数,曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,且对任意 t,有$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$,求 $Q(x,y)$.

例 10 计算曲线积分$\int_L \frac{(x-c)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}$,其中 L 是曲线 $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 上从点$(a,0)$ 到点$(0,b)$ 的弧$(0<c<a,0<b)$.

解:曲线积分与路径无关.选择比较简单的路径.

计算可得$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y(x-c)}{[(x-c)^2+y^2]^{5/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,满足曲线积分与路径无关的条件.因此,选择容易计算的积分路径:先从点$(a,0)$沿直线到点(a,b),再从点(a,b)沿直线到点$(0,b)$.

$$\int_L \frac{(x-c)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}} = \int_0^b \frac{y\mathrm{d}y}{[(a-c)^2+y^2]^{3/2}} + \int_a^0 \frac{(x-c)\mathrm{d}x}{[(x-c)^2+b^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{a-c} - \frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}}.$$

习题

(a)计算曲线积分$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 是摆线$x = t - \sin t - \pi, y = 1 - \cos t$ 上从$t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧.

例 11 计算曲线积分$\int_{AB}\left[\frac{1}{y} + yf(xy)\right]\mathrm{d}x + \left[xf(xy) - \frac{x}{y^2}\right]\mathrm{d}y$,其中函数 $f(x)$ 有连续导数,点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$,$B(1,2)$.

解:用条件判定曲线积分与路径无关.选择比较简单的路径.

计算可得$\frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,满足曲线积分与路径无关的条件.因此,选择容易计算的积分路径:沿曲线 $xy=2$ 从点 $A(3,\frac{2}{3})$到点 $B(1,2)$.

$$\int_{AB}\left[\frac{1}{y} + yf(xy)\right]\mathrm{d}x + \left[xf(xy) - \frac{x}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$
$$= \int_3^1\left[\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}f(2)\right) + \left(-\frac{2}{x}f(2) + \frac{x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_3^1 x\mathrm{d}x = -4.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$有连续导数,$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数.又 L 是在第一象限内从点 $A(a,c)$到点 $B(b,d)$的直线段,求$\int_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}$.

例 12 计算曲线积分$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 是包含坐标原点在其内部的正向闭曲线.

证:用复连通区域的格林公式.选择比较简单的闭路.

积分式在坐标原点无意义,取 $\varepsilon>0$ 足够小,使得圆周 $C: x^2+y^2=\varepsilon^2$ 在 L 的内部.因为被积函数满足微分方程$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,所以在 L 与 C 之间的区域上的二重积分等于零.于是在用多连通区域的格林公式时,相当于换成另一条闭路,

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

评述:当被积函数不满足方程$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$时,也可以用多连通区域的格林公式.不过,那时是用计算另一个曲线积分和一个二重积分,来代替计算一个曲线积分.

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_L \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2 + y^2}$,其中 L 是曲线 $4x^2 + y^2 = 8x$ 的正向.

(b) $\int_L \frac{y\mathrm{d}x + (2-x)\mathrm{d}y}{(2-x)^2 + y^2} + \frac{y\mathrm{d}x + (2+x)\mathrm{d}y}{(2+x)^2 + y^2}$,其中 L 是不经过点(2,0)和(-2,0)的简单光滑闭曲线的正向.

例 13 验证 $e^x(\cos y\mathrm{d}x - \sin y\mathrm{d}y)$是某个函数 $u(x,y)$的全微分,并求出一个这样的函数.

解:用全微分的条件.

计算可得$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x\sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$,满足全微分的条件.选坐标原点为始点,则

$$u(x,y) = \int_0^x e^x\mathrm{d}x - \int_0^y e^x\sin y\mathrm{d}y = e^x - 1 + e^x\cos y - e^x = e^x\cos y - 1.$$

验算:$u(0,0)=0$.

习题

(a)求 a、b,使得$(axy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

(b)求 a,使向量值函数$\overrightarrow{A(x,y)} = 2xy(x^4+y^2)^a\vec{i} - x^2(x^4+y^2)^a\vec{j}$ 在右半平面($x>0$)是某个有连续二阶偏导数的函数 $u(x,y)$的梯度.

例 14 验证$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$在除去坐标原点和 x 轴的负半轴的坐标平面上是某个函数$u(x,y)$的全微分,并求出一个这样的函数.

证:用全微分的条件.

计算可得$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,满足全微分的条件.因为要除去坐标原点和 x 轴的负半轴,选点(1,0)为路径的始点.当 $y=0$ 时,沿 x 轴到点$(x,0)$,得 $u(x,0)=0$.

当 $y\neq0$ 时,先沿铅直方向,再沿水平方向到点(x,y),得

$$u(x,y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} + \int_1^x \frac{-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \arctan y + \arctan\frac{1}{y} - \arctan\frac{x}{y}$$
$$= \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}y - \arctan\frac{x}{y}.$$

问题:当 $y\neq0$ 时,为什么不能先沿水平方向,再沿铅直方向计算 $u(x,y)$?

习题

(a)验证$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$在坐标平面上区域 $D: y<x$ 是某个函数$u(x,y)$的全微分,并求出一个这样的函数.

(b)验证$\frac{(3y-x)\mathrm{d}x + (y-3x)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$在坐标平面上区域 $D: x+y<0$ 是某个函数 $u(x,y)$

的全微分,并求出一个这样的函数.

例 15* 设函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$在区域 D 及其正向光滑边界 L 上有连续的一阶偏导数,L 上点(x,y)处的外法线向量 $\vec{n}$ 的方向角记作 α、β,则

$$\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

证:格林公式的讨论.

设 L 上点(x,y)处沿 L 正向的切向量 $\vec{t}$ 的方向角为 α^*、β^*,则有 $\beta^* = \alpha$,$\alpha^* = \pi - \beta$. 根据格林公式和两类曲线积分之间的关系,有

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_L P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = \int_L (-Q\cos\alpha^* + P\cos\beta^*)\mathrm{d}s$$
$$= \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s.$$

评述:这是格林公式的一种较为对称的形式.

习题

(a)设正向光滑闭曲线 L 围成区域 D,D 的面积记作 $A(D)$,L 上点(x,y)处的外法线向量 $\vec{n}$ 的方向角记作 α、β,则 $A(D) = \frac{1}{2}\int_L (x\cos\alpha + y\cos\beta)\mathrm{d}s$.

(b) 设 L 是正向光滑闭曲线,$\vec{h}$ 是任意给定的非零向量,α 是 $\vec{h}$ 与 L 上点(x,y)处的外法线向量 $\vec{n}$ 之间的夹角,则 $\int_L \cos\alpha\mathrm{d}s = 0$.

例 16* 设函数 $u(x,y)$在区域 D 及其正向光滑边界 L 上有连续的二阶偏导数,L 上点(x,y)处的外法线方向的方向导数记作$\frac{\partial u}{\partial n}$,则

$$\iint_D u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_L u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma.$$

证:用方向导数公式和格林公式证明恒等式.

$$\int_L u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_L u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma$$
$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\mathrm{d}\sigma.$$

习题

(a)设函数 $u(x,y)$在区域 D 及其正向光滑边界 L 上有连续的二阶偏导数,且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$,区域 D 的面积记作 $A(D)$,L 上点(x,y)处的外法线方向的方向导数记作$\frac{\partial u}{\partial n}$,则 $\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = A(D)$.

(b)设函数 $u(x,y)$在区域 D 内有连续的二阶偏导数,则在区域 D 内满足微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的充分必要条件为:对于 D 内任意光滑闭曲线 L,有 $\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = 0$.

(c)设在区域 D 及其正向光滑边界 L 上函数 $u(x,y)$有连续的二阶偏导数,函数 $v(x,y)$

有连续的偏导数，则

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\iint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma .$$

第六节　曲面积分的性质和计算

例 1　设光滑曲面Σ关于 xOy 平面对称，Σ_1 是Σ在上半空间的部分．函数 $f(x,y,z)$在曲面Σ上连续，且满足 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

证：用曲面积分定义．

将曲面Σ分成上下两部分，然后分别将这两部分关于 xOy 平面对称地分割，对称地取点，则积分和为

$$S=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^+ +\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,-\zeta_i)\Delta S_i^- =2\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^+ .$$

取极限即可．

习题

(a)设光滑曲面Σ关于 xOy 平面对称，函数 $f(x,y,z)$在曲面Σ上连续，且满足 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$.

(b)设光滑曲面Σ关于平面 $y=x$ 对称，函数 $f(x,y,z)$在曲面Σ上连续，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(y,x,z)\mathrm{d}S$.

例 2　设函数 $f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续，Σ的面积记作 A，则存在点$M(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$，使得 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=f(\xi,\eta,\zeta)A$.

证：函数 $f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续，则取到它的最大值 M 与最小值 m．根据对面积的曲面积分的保序性定理，有

$$mA=\iint_\Sigma m\mathrm{d}S\leqslant\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S\leqslant\iint_\Sigma M\mathrm{d}S=MA.$$

即 $m\leqslant\frac{1}{A}\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S\leqslant M$，用连续函数的介值定理即可．

习题

(a)设函数 $f(x,y,z)\geqslant 0$ 在光滑曲面Σ上连续，且 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$ ，则在曲面Σ上有 $f(x,y,z)\equiv 0$.

(b)设函数 $f(x,y,z)$连续，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint_{\Sigma(t)}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma(t)$是

(1)平面 $x+y+z=t$ 在第一卦限的部分；

(2)球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$.

例 3　设Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$M(x_0,y_0,z_0)$是球面外一点，求证：$4\pi R^2(d-R)^2\leqslant$

$\iint_{\Sigma}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\,\mathrm{d}S \leqslant 4\pi R^2(\mathrm{d}+R)^2$,其中 d 是点 M 到坐标原点的距离.

证:用对面积的曲面积分的保序性定理证明不等式.

被积函数$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上动点(x,y,z)到球外定点(x_0,y_0,z_0)的距离的平方,所以它的最大最小值在球面上取到.用拉格朗日乘数法可得:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 的最大最小值分别为$(d+R)^2$ 和$(d-R)^2$.

于是,根据对面积的曲面积分的保序性定理,有

$$4\pi R^2(\mathrm{d}-R)^2 \leqslant \iint_{\Sigma}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]dS \leqslant 4\pi R^2(d+R)^2 .$$

习题

(a)设 Σ 是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,求证:$\iint_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}R)\mathrm{d}S \geqslant 4\pi(a+b+c)R^2$.

例 4 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中Σ是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z\leqslant 1$.

解:向坐标平面投影.

向 xOy 平面的投影区域为$D: x^2+y^2\leqslant 1$.$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$.用计算公式,得

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$,其中Σ是四面体 $x+y+z\leqslant 1, x,y,z\geqslant 0$ 的整个表面.

(b)设Σ是椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $M(x,y,z)\in\Sigma$,π 为Σ 在点M 处的切平面,$\rho(x,y,z)$为坐标原点到平面 π 的距离,求 $\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

例 5 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中Σ是 $z=x^2+y^2, z\leqslant 1$.

解:奇偶对称性.

曲面关于 xOz 平面和 yOz 平面对称,因此$\iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=0$.

$$\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1).$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}(x+2y^2+3z^3)\mathrm{d}S$,其中Σ是左半球面 $y=-\sqrt{a^2-x^2-z^2}$.

(b) $\iint_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$,其中Σ是下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

(c) $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中Σ是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$.

[提示：由曲面关于平面 $x=a$ 对称，有 $\iint_{\Sigma}(x-a)\mathrm{d}S=0$.]

例 6 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

解:轮换对称性.

因为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 关于平面 $z=x$ 和 $z=y$ 都对称，所以

$$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S.$$

于是，

$$\iint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=8\pi R^2$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}(x+2y+4z+5)^2\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是 $|x|+|y|+|z|=1$.

(b) $\iint_{\Sigma}(ax+by^2+cz^3)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z\leqslant 1$.

例 7* 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，$0\leqslant z\leqslant h$.

解:用圆柱面的参数方程.

令 $x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，则 $\mathrm{d}S=R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

$$\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi Rh^3.$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}\frac{|x|}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，$0\leqslant z\leqslant h$.

(b) $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

[提示：球面参数方程：$x=R\sin\varphi\cos\theta$，$y=R\sin\varphi\sin\theta$，$z=R\cos\varphi$，而面积元素 $\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.]

例 8 设光滑有向曲面Σ关于 yOz 平面对称，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在Σ上连续，且 $P(-x,y,z)=P(x,y,z)$，$Q(-x,y,z)=-Q(x,y,z)$，$R(-x,y,z)=-R(x,y,z)$则 $\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

证:用曲面积分定义.

将曲面Σ分成前后两部分，然后分别将这两部分关于 yOz 平面对称地分割，对称地取点，则$(\Delta\sigma_i^+)_{yz}=-(\Delta\sigma_i^-)_{yz}$，$(\Delta\sigma_i^+)_{zx}=(\Delta\sigma_i^-)_{zx}$，$(\Delta\sigma_i^+)_{xy}=(\Delta\sigma_i^-)_{xy}$积分和分别为

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta\sigma_i^+)_{yz}+\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,-\eta_i,\zeta_i)(\Delta\sigma_i^-)_{yz}=0$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta\sigma_i^+)_{zx}+\sum_{i=1}^{n}Q(-\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta\sigma_i^-)_{zx}=0$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta\sigma_i^+)_{xy}+\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,-\zeta_i)(\Delta\sigma_i^-)_{xy}=0$$

取极限即可.

习题

(a)设光滑有向曲面Σ关于平面 $y=x$ 对称,函数 $P(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Σ上连续,则 $\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma P(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$,$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma R(y,x,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

(b)设函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$在有向光滑曲面Σ上连续,Σ的面积记作 A,则

$$\left|\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint_\Sigma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}dS$$
$$\leqslant A\max_{(x,y,z)\in\Sigma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}.$$

例 9 计算曲面积分 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中Σ是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leqslant1$ 的下侧.

解:向坐标平面投影.奇偶对称性.

曲面Σ关于 yOz 平面对称,被积函数 x^2 关于 x 是偶函数,于是 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi.$$

习题

(a) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

例 10 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leqslant h$ 的下侧.

解:轮换对称性.

曲面Σ关于平面 $y=x$ 对称,用轮换对称性,得

$$\iint_\Sigma(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_\Sigma(x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$\iint_\Sigma(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_\Sigma f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant1$ 的表面外侧,函数 $f(x)$、$g(y)$、$h(z)$ 连续.

(b) $\iint_\Sigma\frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2z}$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

例 11　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x+1)yz(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中$\Sigma$是柱面 $y=x^2$、$y\leqslant 1$、$0\leqslant z\leqslant 1$ 的右侧.

解:向坐标平面的投影是曲线弧.

因为曲面Σ在 xOy 平面的投影是一条曲线,所以 $\iint_{\Sigma}(x+1)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

曲面Σ关于 yOz 平面对称,函数 yz 关于x 的是偶函数,所以 $\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$;函数 xyz 关于 x 的是奇函数,所以$\iint_{\Sigma}xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$.

记Σ_1 是Σ在第一卦限的部分,D_1 是Σ_1 在 yOz 平面上的投影,D_2 是Σ_1 在 zOx 平面上的投影,用计算公式,得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}(x+1)yz(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\&=2\iint_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iint_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint_{D_1}y^{3/2}z\mathrm{d}\sigma+2\iint_{D_2}x^2z\mathrm{d}\sigma\\&=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1y^{3/2}z\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1x^2z\mathrm{d}x=\frac{11}{15}.\end{aligned}$$

习题　计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma$是 xOy 平面上的正方形 $0\leqslant x$、$y\leqslant 1$ 的上侧.

(b) $\iint_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 和平面 $z=\pm R$ 围成的立体的表面外侧.

例 12*　设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 上有连续的偏导数,曲面 $z=f(x,y)$的上侧记作Σ. 又设函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$在Σ上连续,则 $\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}[P(-f_x)+Q(-f_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证:曲面 $z=f(x,y)$上一点 $M(x,y,z)$处的向上的法向量为 $\vec{n}\{-f_x,-f_y,1\}$. 由两类曲面积分之间的关系与对面积的曲面积分的计算公式,得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_{D}\left(P\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}+Q\frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}+R\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\right)\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}[P(-f_x)+Q(-f_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

习题

(a)本例是将曲面向 xOy 平面投影. 同样由向其他两个坐标平面投影的公式. 写出并证明之.

(b)用类似的方法推导对坐标的曲线积分的公式.

(c)试用本例与习题(a)中的公式计算本节例 9、例 10、例 11 及其习题.

第七节　高斯公式和斯托克斯公式

例 1　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是立体 $\Omega: z\leqslant x^2+y^2\leqslant 1, x, y, z\geqslant 0$ 的表面外侧.

解：用高斯公式计算.

$$\iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(z + x^2 + y^2)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{r^2}(z + r^2)r\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8}$$

习题　计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}(x - y + z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - z + x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是立体 $\Omega: |x| + |y| + |z| = 1$ 的外侧.

(b)仿照本章第五节例 7，写出并证明一个三重积分的分部积分公式.

例 2　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲面 $z = x^2 + y^2, z\leqslant 4$ 下侧.

解：添加一个面成闭曲面，用高斯公式.

添加平面$\Sigma_1: z = 4$ 上侧. 用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega}(3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{32}{3}\pi.$$

习题　计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}(y^2 - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲面 $z = 2 - x^2 - y^2, z\geqslant 0$ 下侧.

(b) $\iint_{\Sigma}(y - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是 $x^2 + y^2 = 1, 0\leqslant z\leqslant 3$ 外侧.

(c) $\iint_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是 yOz 平面上曲线 $z = e^y, 0\leqslant y\leqslant a$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面的下侧.

例 3　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$\Sigma$是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解：用高斯公式计算.

被积函数在原点没有定义，不能直接用高斯公式.

曲面上任意点的坐标满足方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$,代入,再用高斯公式,得

$$\iint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}v=4\pi.$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

例 4 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中$\Sigma$是椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 的外侧.

解:用复连通区域的高斯公式.

不能直接用高斯公式,也不能代入.用复连通区域的高斯公式.取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 的内部.令Σ_1 是小球面的内侧,Ω 是椭球面与小球面之间的立体,Ω_1 是小球内部,则有

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_1}3\mathrm{d}v=4\pi.$$

习题 计算下列曲面积分.

(a) $\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中$\Sigma$是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

例 5 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是锥面 $z^2=x^2+y^2,-1\leqslant z\leqslant 0$,$\cos\alpha$ 等是曲面Σ上点(x,y,z)处外法线的方向余弦.

解:用高斯公式计算.

曲面Σ上点(x,y,z)处外法线方向指向上侧.添加一个平面 $z=-1$ 下侧,记它在 xOy 平面上的投影为 D,曲面与平面围成的立体为 Ω,用高斯公式,得

$$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$$

$$=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}v+\iint_{D}(-1)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{-1}^{-r}3(r^2+z^2)\mathrm{d}z+\iint_{D}(-1)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{10}.$$

习题

(a)设Σ是简单光滑闭曲面,$\cos\alpha$ 等是曲面Σ上点(x,y,z)处外法线的方向余弦.求证:由Σ围成的立体 Ω 的体积 $V=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$.

例 6 设Σ是简单光滑闭曲面,$\vec{n}$ 是曲面Σ上点(x,y,z)处外法线向量,$\vec{h}$ 是任意给定的非零向量,$(\vec{n},\vec{h})$是 $\vec{n}$ 与$\vec{h}$ 之间的夹角,则 $\iint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{h})\mathrm{d}S=0$.

证:用高斯公式证明恒等式.

法向量 $\vec{n}$ 和给定向量 $\vec{h}$ 的方向余弦分别记为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 和 $\cos a$、$\cos b$、$\cos c$，闭曲面 Σ 围成的立体记为 Ω. 根据高斯公式，有

$$\iint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{h})\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos a + \frac{\partial}{\partial y}\cos b + \frac{\partial}{\partial z}\cos c\right)\mathrm{d}v = 0.$$

习题

(a)设 Σ 是简单光滑闭曲面，围成立体 Ω. $\vec{n}$ 是曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处外法线向量. 定点 (a,b,c) 不在 Σ 上，记 $\vec{r}=\{x-a,y-b,z-c\}$，$r=|\vec{r}|$，则

$$\iint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{r})\mathrm{d}S = 2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{r}.$$

(b)条件同本例习题(a)，计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\vec{n},\vec{r})}{r^2}\mathrm{d}S$.

例 7 设函数 $u(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数，Σ 是简单光滑闭曲面，围成立体 Ω. $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处沿外法线方向的方向导数，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v.$$

证：用方向导数公式和高斯公式证明恒等式.

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v .$$

习题

(a)设函数 $u(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数，Σ 是简单光滑闭曲面，围成立体 Ω. $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处沿外法线方向的方向导数，则

$$\iiint_{\Omega}u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v = \iint_{\Sigma}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}v .$$

(b)设函数 $u(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数，Σ 是简单光滑闭曲面，围成立体 Ω. 又设在 Σ 上 $u(x,y,z)=0$，在 Ω 的内部 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，则在 Ω 上 $u(x,y,z)\equiv 0$.

评述：将本节例 6 和本节例 7 及其习题与本章第五节例 15 和例 16 及其习题比较，可以看出由格林公式和高斯公式推出的结果的相似性. 实际上，有一个统一的理论. 在那里，牛顿-莱布尼兹公式、格林公式、高斯公式和斯托克斯公式都是一个基本公式的特例.

(c)设函数 $u(x,y,z)$、$w(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数，Σ 是简单光滑闭曲面，围成立体 Ω. $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处沿外法线方向的方向导数，则

$$\iiint_{\Omega}w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v = \iint_{\Sigma}w\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\mathrm{d}v.$$

例 8 计算曲线积分$\int_\Gamma (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与圆柱面$x^2+y^2=Rx$的交线,从$z$轴正向看是逆时针方向.

解:用斯托克斯公式计算.变成对坐标的曲面积分.

取以Γ为边界的部分球面为Σ,Σ在xOy平面的投影记作D,用斯托克斯公式,得

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\
&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_\Sigma 2(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\Big[2(y-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+\\
&\quad 2(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+2(x-y)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

习题 计算曲线积分

(a) $\int_\Gamma y^2z^2\mathrm{d}x+z^2x^2\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是曲面$z=xy$与$x^2+y^2=Rx$的交线,从$z$轴正向看是逆时针方向.

(b) $\int_\Gamma \cos(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$,其中$\Gamma$是简单光滑闭曲线.

(c) $\int_\Gamma \frac{(x+1)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$,其中$\Gamma$球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线,从$z$轴正向看是逆时针方向 .

例 9 计算曲线积分$\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$与立方体$0\leqslant x,y,z\leqslant a$的表面的交线,从$z$轴正向看是逆时针方向.

解:用斯托克斯公式计算.变成对面积的曲面积分.

因为Γ是平面上的边长等于$\frac{a}{\sqrt{2}}$的正六边形Σ的边界,将曲线积分化作对面积的曲面积分比较方便.取以Γ为边界的部分平面为Σ.平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$的向上的法向量为$(1,1,1)$,因此方向余弦都等于$\frac{1}{\sqrt{3}}$.用斯托克斯公式,得

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\\
&=\iint_\Sigma\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\
&=\iint_\Sigma\left[-2(y+z)\frac{1}{\sqrt{3}}-2(z+x)\frac{1}{\sqrt{3}}-2(x+y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\mathrm{d}S\\
&=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\frac{3}{2}a\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}a\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-\frac{9}{2}a^3.\end{aligned}$$

习题 计算下列曲线积分.

(a) $\int_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中 Γ 是:

(1)圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(b>0,c>0)$的交线,从 z 轴正向看是逆时针方向.

(2)圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x-y+z=2$ 的交线,从 z 轴正向看是逆时针方向.

(b) $\int_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中 Γ 是:

(1)球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向看是逆时针方向.

(2)球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+z=a$ 的交线,从原点看去是顺时针方向.

例 10* 计算曲线积分 $\int_L(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,其中 L 沿螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 从点$(a,0,0)$到点$(a,0,2\pi b)$.

解:用条件判定曲线积分与路径无关.选择比较简单的路径.

因为$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=-x,\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=-y,\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-z$,所以曲线积分与路径无关,可以选择容易计算的路径.取从$(a,0,0)$到点$(a,0,2\pi b)$的直线 $x=a,y=0$,以 z 为参数,用计算公式,得

$$\int_L(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi b}z^2\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi^3b^3.$$

习题 计算曲线积分.

(a) $\int_L(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$,其中 L 是曲线$x=a\sin^2t,y=2a\sin t\cos t$,$z=a\cos^2t$,参数从 0 增加到 π.

例 11* 求证:$ye^{xy}\mathrm{d}x+(xe^{xy}-\cos z)\mathrm{d}y+y\sin z\mathrm{d}z$ 是某个函数 $u(x,y,z)$的全微分,并求出一个这样的函数 $u(x,y,z)$.

解:用条件判定全微分.

计算可得$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\sin z,\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=(1+xy)e^{xy}$,满足全微分的条件.以坐标原点为始点,

$$u(x,y,z)=\int_0^x0\mathrm{d}x+\int_0^y(xe^{xy}-1)\mathrm{d}y+\int_0^zy\sin z\mathrm{d}z=e^{xy}-y\cos z-1.$$

习题

(a)求证:$(yz-3x^2)\mathrm{d}x+(zx-3y^2)\mathrm{d}y+(xy-3z^2)\mathrm{d}z$ 是某个函数 $u(x,y,z)$的全微分,并求出一个这样的 $u(x,y,z)$.

例 12 计算向量场 $\vec{F}=2xy\vec{i}+e^z\sin y\vec{j}+(x^2+y^2+z^2)\vec{k}$ 的散度和旋度.

解:用定义.

$$\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2y+e^z\cos y+2z$$

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\{2y-e^z\sin y,-2x,-2x\}.$$

习题

(a)求向量场 $\vec{F}=v\mathrm{grad}u$ 的旋度,其中 $u(x,y,z)$和 $v(x,y,z)$有连续的偏导数.

(b)设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$.

第八节　多元积分的应用

例 1　设半径为 a 的球面 S_1 的球心位于半径为 $R(2R>a>0)$的球面 S_2 上,求证:当 $a=\frac{4}{3}R$ 时,包含在球面 S_2 内部的球面 S_1 的部分的面积最大.

证:用二重积分计算曲面面积.

首先要适当地建立坐标系.

将球面 S_2 的球心取在坐标原点,球面 S_1 的球心取在点$(0,0,R)$,则它们的方程分别为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2=a^2$. 它们的交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2=\frac{a^2(4R^2-a^2)}{4R^2}$. 记 $\rho=\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$. 包含在球面 S_2 内部的球面 S_1 的部分的方程为 $z=R-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,于是$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. 代入曲面面积公式,得

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{a\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi\left(a^2-\frac{a^3}{2R}\right).$$

用导数可得:当 $a=\frac{4}{3}R$,所求面积最大.

习题

(a)求包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的部分的面积.

(b)求包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$的部分的面积.

(c)求包含在柱面$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内部的曲面 $x^2+y^2=2az$ 的部分的面积.

例 2　计算由曲面 $z=xy$、$x+y+z=1$、$z=0$ 围成的立体的体积.

解:用二重积分计算立体体积. 直角坐标系.

曲面 $z=xy$, $x+y+z=1$ 的交线在 xOy 平面上的投影为曲线 $x+y+xy=1$. 它将积分区域分成两部分:在曲面 $z=xy$ 正下方的记作 D_1,在曲面 $x+y+z=1$ 正下方的记作 D_2. 则有

$$V=\iint_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}xy\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{17}{12}-2\ln2.$$

习题

(a)求由曲面 $z=1+x+y$、$x+y=1$ 与三个坐标平面围成立体的体积.

(b)求由曲面 $z=\cos x\cos y$、$x+y=\pm\frac{\pi}{2}$、$x-y=\pm\frac{\pi}{2}$, $z=0$ 围成立体的体积.

(c)求曲面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面,使得它与该曲面以及柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的立体的体积最小.

例 3 计算由曲面 $x^2+y^2=az$、$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体的体积.

解:用二重积分计算立体体积.极坐标系.

两个曲面的交线在 xOy 平面上的投影为圆 $r=a$.于是

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left[(2a-r)-\frac{r^2}{a}\right]r\mathrm{d}r=\frac{5}{6}\pi a^3.$$

习题

(a)计算立体 $x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x$、$z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$、$z\geqslant 0$ 的体积.

(b)曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分,计算这两部分的体积之比.

(c)求证:曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上任意点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 围成的立体的体积等于常数.

例 4* 计算由曲线 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$ 与坐标轴围成的平面图形的面积.

解:用二重积分的换元法计算平面图形面积.

xOy 平面上图形的面积可以表示为 1 的二重积分,从而可以用二重积分的换元法.

令 $x=ar\cos^8\theta$, $y=br\sin^8\theta$.这个变换将问题中的图形变成极坐标系中单位圆在第一象限的部分.雅可比行列式 $J=8abr\cos^7\theta\sin^7\theta$.于是

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 8abr\cos^7\theta\sin^7\theta\mathrm{d}r=\frac{ab}{70}.$$

习题

(a)计算由曲线 $y^2=2px$、$y^2=2qx$、$0<p<q$、$x^2=2ry$、$x^2=2sy$、$0<r<s$ 围成的平面图形的面积.

(b)计算由曲线 $py^2=x^3$、$qy^2=x^3$、$0<p<q$、$rx^2=y^3$、$sx^2=y^3$、$0<r<s$ 围成的平面图形的面积.

(c)计算由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 与坐标轴围成的平面图形的面积.

例 5* 计算由曲面 $z=x^2+y^2$、$xy=a^2$、$xy=2a^2$、$y=\frac{x}{2}$、$y=2x$ 和 $z=0$ 围成的立体的体积.

解:用二重积分的换元法计算立体体积.

记 xOy 平面上区域 D: $a^2\leqslant xy\leqslant 2a^2$, $\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x$,则问题中所求立体的体积为 $V=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$.用二重积分的换元法.令 $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.这个变换将区域变成 uov 平面上的矩形 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2$, $\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2$.雅可比行列式 $J=\frac{1}{2v}$.于是

$$V=\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}u\int_{1/2}^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{\mathrm{d}v}{2v}=\frac{9}{4}a^4.$$

习题

(a)计算由曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$、$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$、$z=0$围成的立体的体积.

(b)计算由曲面$z=xy$、$y=x^2$、$2y=x^2$、$y^2=x$、$y^2=2x$和$z=0$围成的立体的体积.

例6* 设函数$p(x)\geqslant 0$、$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(x)$、$g(x)$均单调增加,则$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证:证明定积分的不等式.

根据问题中的条件,对于任意的x、$y\in[a,b]$,有

$$p(x)p(y)[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)]\geqslant 0.$$

将这个不等式的两端在正方形$D:a\leqslant x,y\leqslant b$上同时积分,整理即得.

评述:用二重积分证明定积分的不等式是一件饶有兴味的事.一般我们总是将复杂问题转化为简单问题解决.例如将二重积分化为二次(定)积分.然而,在这里却是将定积分的问题转化为二重积分.

习题

(a)设函数$f(x)>0$在区间$[a,b]$上连续,且单调减少,则$\dfrac{\int_a^b xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

(b)设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

(c)设$f(x)>0$在区间$[a,b]$上连续,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2$.

例7* 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数,且$|f'(x)|\leqslant M$,则$(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{M^2}{12}(b-a)^4$.

证:证明定积分的不等式.

取正方形区域$D:a\leqslant x,y\leqslant b$,计算可知

$$\begin{aligned}(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2}\iint_D(f'(\xi))^2(x-y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{M^2}{2}\iint_D(x-y)^2\mathrm{d}\sigma=\frac{M^2}{12}(b-a)^4.\end{aligned}$$

习题

(a)设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数,且$|f'(x)|\leqslant M$,则$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{M^2}{12}(b-a)^4$.

(b)设函数$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数,且$0\leqslant f'(x),g'(x)\leqslant M$,则$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M^2}{12}(b-a)^4$.

例8* 计算广义积分$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$,其中$0<a<b$.

解:计算广义积分.

因为 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \dfrac{x^b - x^a}{\ln x}$,所以

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y \mathrm{d}x = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

习题 计算下列广义积分.

(a) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$,其中 $0 < a < b$.

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\mathrm{d}x$,其中 $a > 0, b > 0$.

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x}\mathrm{d}x$,其中 $a > 0, b > 0$.

例 9 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解:计算广义积分.

换元 $u = \sqrt{x}$,用已知广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$,得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

习题

(a)计算广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

(b)计算广义积分 $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

(c)求证:$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \left(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

例 10 计算由不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$, $x^2+y^2 \leqslant z^2$ 确定的立体的体积.

解:用球坐标计算三重积分.

立体的体积可以表示为被积函数等于 1 的三重积分,从而可以用三重积分计算.

令 $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$. 则立体为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi$. 于是,体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^2\sin\varphi \mathrm{d}r = \pi a^3.$$

习题

(a)求由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z$ 围成的立体的体积.

例 11* 计算由曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 围成的立体的体积.

解:用三重积分的换元法计算立体体积.

立体的体积可以表示为被积函数等于 1 的三重积分,从而可以用三重积分的换元法.

令 $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\varphi$. 则在新的坐标系中立体为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant$

$\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant\sin\varphi$. 雅可比行列式 $J=abcr^2\sin\varphi$.

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin\varphi}abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi^2abc.$$

习题

(a)求闭曲面 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$所围成的立体的体积.

(b)椭球体 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$ 被曲面 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$分割成两部分,求这两部分的体积.

(c)设 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0$,求由平面 $a_kx+b_ky+c_kz=\pm d_k, k=1,2,3$ 围成的平行六面体的体积.

例 12* 计算柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 截出部分的面积.

解:用对弧长的曲线积分计算柱面面积.

利用对称性,只计算 xOy 平面上面的部分. 记 $L:x^2+y^2=ax$,则所求面积为

$$S=2\int_L z\mathrm{d}s=2\int_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}s.$$

参数化 $x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta), y=\frac{a}{2}\sin\theta$,代入,得

$$S=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\theta)}\,\frac{a}{2}\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=4a^2.$$

习题

(a)求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 所围成的立体的表面积.

例 13 计算曲线 $x^3+y^3=3axy(a>0)$围成区域 D 的面积.

解:用曲线积分计算平面图形的面积.

令 $y=tx$,得曲线的参数方程 $x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. 不难验证: 当参数从 0 增加到 $+\infty$ 时,曲线的弧 L 围成区域 D. 用面积的曲线积分公式,得

$$A=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{9a^2t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

习题

(a)求曲线 $x^3+y^3=x^2+y^2$ 与坐标轴围成区域 D 的面积.

(b)求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$围成区域 D 的面积.

例 14 设Σ是简单光滑闭曲面,$\cos\alpha$ 等是曲面Σ上点(x,y,z)处外法线的方向余弦. 求证: 由Σ围成的立体 Ω 的体积 $V=\frac{1}{3}\iint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$.

证:用曲面积分计算立体体积.

用高斯公式,有

$$\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=V.$$

习题

(a)设球的半径为 R,表面积为 S,体积为 V,求证:$V=\frac{1}{3}RS$.

答案与提示

第一节 重积分的定义和性质

1.(a) 仿本例计算.$\frac{1}{6}$. (b)几何意义,半球体积.$\frac{2}{3}\pi R^3$. (c) 重积分是常数.设 $f(x,y)=xy+c$,代入得 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

2.(a)仿本例证明. (b) 仿本例证明.

3.(a)用本例. (b)仿本例与习题(a)证明.

4.(a)仿本例证明. (b) 仿本例证明.$\frac{\pi^2}{408}\leqslant I\leqslant\frac{\pi^2}{400}$.

5.(a)$I<0$.

6.(a)用对角线将正方形分割成四个三角形.仿本例分别用微分中值定理证明不等式.
(b) 仿第三章第三节例 13 证明. (c)仿第三章第三节例 4 证明.

7.(a)用重积分的中值定理.π. (b)$2f(0,0)$.

第二节 二重积分的计算

1.(a)$-\frac{2}{15}$. (b)$4-\frac{\pi}{2}$.

2.(a)先对 x 积分.$1-\sin 1$. (b)$e^{-1/2}$.

3.(a)用奇偶对称性.0. (b)只算第一象限部分.2. (c)积分区域关于直线 $x=a$ 对称,则 $\iint_D(x-a)\mathrm{d}\sigma=0$.$\pi(a+b)$.

4.(a)$\frac{1}{4}(e-1)^2$. (b)由轮换对称性,得 $\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right]\mathrm{d}\sigma$.

5.(a)用直线 $x=y$ 将 D 分成两部分.0. (b)$\frac{11}{30}$. (c)$\frac{4}{3}$.

6.(a)用本例.$\frac{1}{4}(\ln 2)^4$.

7.(a)设 $|f_{xy}(x,y)|\leqslant K$,用本例. (b)用本例.仿习题(a)与第三章第六节例 2 习题(a)(2)证明.

8.(a)用本例. (b)仿本例与习题(a)证明.

9.(a)交换积分顺序.2. (b)交换积分顺序.$\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$.

10.(a)交换积分顺序. (b)用 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

11.(a) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$.

12.(a) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

13.(a) $\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}-1)$.　(b) $\frac{3}{4}$.

14.(a) $\frac{5}{4}\pi a^3$.　(b)用轮换对称性. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

15.(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.　(b) $\frac{R^2}{2}\int_0^{\arctan R}f(\tan\theta)d\theta$.

16.(a)用极坐标系.　(b)由泰勒公式,得 $r^3\geqslant\sin r^3\geqslant r^3-\frac{1}{6}r^9$.　(c)由二元函数的微分中值定理,得 $|f(x,y)|\leqslant M(R-\sqrt{x^2+y^2})$.

17.(a) $-\pi$.　(b) π.

18.(a)用二阶导数定义. 2π.　(b) $2\pi f(0)$.

19.(a) $\frac{171}{2}$.　(b)0.　(c) $\frac{1}{4}(e-e^{-1})$.

20.(a)令 $u=x+y,v=x-y$.　(b)令 $u=x+y,v=x-y$.　(c)令 $x=\frac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}},y=\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

第三节　三重积分的计算

1.(a) $e-3$.　(b) $\frac{1}{364}$.

2.(a)仿本例证明.　(b)仿本例证明.　(c) $\frac{1}{2}(1-\cos1)$.

3.(a) $2\pi ab(\frac{1}{3}+\frac{1}{5c^2})$.

4.(a)(1) $\frac{4}{3}\pi f(0)$. (2) $\frac{1}{2}\pi f'(0)$.

5.(a) $\frac{\pi}{10}$.　(b) $\frac{128}{3}\sqrt{2}\pi$.　(c)分成两个积分. $\frac{\pi}{3}$.

6.(a) $\frac{203}{15}\pi$.　(b) 336π.　(c) $\pi(1-e^{-1})$.

7.(a) $\frac{\pi}{3}h^3+\pi hf(0)$.

8.(a) $\frac{1359}{2240}\pi$.

9.(a) $\pi f'(0)$.　(b)用球坐标系.

10.(a)用轮换对称性与柱坐标系. $\frac{1}{5}\pi R^5$.　(b)用轮换对称性与球坐标系. $2\pi R^5$.

11.(a)计算一项的积分,由对称性得另外两项的积分. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2)$.

(b) $\frac{\pi}{20}abc(a^2+b^2+4c^2)$.

12. (a)令 $u=xy, v=\frac{y}{x}, w=\frac{x^2+y^2}{z}$.

$\frac{1}{40}(d^5-c^5)(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})\left[(q^2-p^2)(1+\frac{1}{p^2q^2}+4\ln\frac{q}{p}\right]$

第四节　曲线积分的性质与计算

1. (a)命题　设 L 是关于 y 轴对称的光滑曲线. L_1 是它的位于右半平面的部分. 函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续,且 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$. (b)仿本章第一节例 3 证明.

2. (a)仿定积分中值定理证明. (b) 用习题(a). $2\pi f(0,0)$.

3. (a) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$. (b)令 $x=t\cos\theta, y=t\sin\theta$,用 $|\sin2\theta|\leqslant1$. 0.

4. (a) $1+\sqrt{2}$. (b) $\frac{\pi}{4}\cos1+2\sin1$.

5. (a)奇偶对称性. 0. (b)只算位于第一象限的部分. $\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. (c) $4a^{7/3}$.

6. (a)轮换对称性. $\frac{4\sqrt{6}}{9}\pi$.

7. (a) 命题:设 L 是关于 y 轴对称的光滑曲线. L_1 是它位于右半平面的部分. 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 L 上连续,且满足 $P(-x,y)=-P(x,y)$, $Q(-x,y)=-Q(x,y)$,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0, \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=2\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$.

8. (a)用本例. 0.

9. (a) $2e-2$. (b) $a=1$ 时,积分有最小值 $\pi-\frac{8}{3}$. (c)分四段计算. 再用定积分保序性定理.

10. (a) $12\arctan\frac{b}{a}-4\pi$.

11. (a) $\frac{1}{3}[(a_2^2+b_2^2+c_2^2)^{3/2}-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)^{3/2}]$. (b)令 $x=-\frac{1}{2}+\cos t, y=-\frac{1}{2}+\sin t$, $z=\frac{3}{2}-\cos t-\sin t$. -2π.

第五节　格林公式

1. (a) $\frac{3}{4}$. (b) $\frac{1-e^{\pi}}{5}$.

2. (a) $A(D)$ 表示 D 的面积, $mA(D)$.

3. (a) $\frac{1}{2}\pi ma^2$. (b) $\frac{1}{2}\pi a^3$. (c) $\pi-2$.

4. (a)0.

5. (a)用格林公式,再求一元函数最大值. (b)用格林公式,再估计二重积分的值.

6. (a)0.

7. (a)仿本例证明. (b)仿本例证明. (c)用习题(b). $\frac{\pi}{2e}$.

8.(a)仿本例证明.

9.(a)$f(x)=x^2$.　(b)$Q(x,y)=x^2+2y-1$.

10.(a)改为沿圆 $x^2+y^2=\pi^2$ 的上半弧. $-\pi$.

11.(a)沿折线积分. $F\left(\frac{d}{b}\right)-F\left(\frac{c}{a}\right)$.

12.(a)-2π.　(b)设 L 围成区域D.点$(2,0)$、$(-2,0)$都不在 D 内时,0.只有一个在 D 内时,-2π.都在 D 内时,-4π.

13.(a)$a=2,b=-2$.　(b)$a=-1$.

14.(a)$u(x,y)=\frac{y}{x-y}$.　(b)$u(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}+1$.

15.(a)用本例.　(b)设 β_0、β_1 分别是向量 $\vec{h}$、$\vec{n}$ 与 x 轴正向的夹角,则 $\alpha=\beta_1-\beta_0$.

16.(a)仿本例证明.　(b)仿本例证明.充分性用本章第一节例 6 习题(b).　(c)仿本例证明.

第六节　曲面积分的性质和计算

1.(a)仿本例证明.　(b)仿本章第一节例 3 证明.

2.(a)仿第三章第三节例 13 证明.　(b)用本例.(1)$\frac{\sqrt{3}}{2}f(0,0,0)$.(2)$4\pi f(0,0,0)$.

3.(a)解条件极值问题,再用保序性定理.

4.(a)$\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.　(b)$3\pi$.

5.(a)奇偶对称性. $\frac{4}{3}\pi a^4$.　(b)$\frac{R^5}{2}$.(c)$4\pi(a+b+c)$.

6.(a)$114\sqrt{3}$.　(b)$\sqrt{2}\pi(\frac{b}{4}+\frac{2c}{5})$.

7.(a)$4\arctan\frac{h}{R}$.　(b)$\frac{2\pi R}{a}(|R+a|-|R-a|)$.

8.(a) 仿本章第一节例 3 证明.　(b)仿本章第四节例 8 证明.

9.(a)$\frac{8}{3}\pi$.

10.(a)$f(1)+g(1)+h(1)-f(0)-g(0)-h(0)$.　(b)$4\pi\tan 1$.

11.(a)投影是曲线弧.0.　(b)$\frac{\pi^2 R}{2}$.

12.(a)命题:设函数 $x=g(y,z)$在区域 D 上有连续的偏导数,曲面 $x=g(y,z)$的上侧记作Σ.又设函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$在Σ上连续,则 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D[P+Q(-g_y)+R(-g_z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.仿本例证明.

(b)命题:设曲线 L 的方程$x=g(y)$有连续导数,始点和终点对应的 y 坐标分别为y_0、y_1.又设函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$在 L 上连续,则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{y_0}^{y_1}(Pg'+Q)\mathrm{d}y$.仿本例证明.

第七节　高斯公式和斯托克斯公式

1.(a)4.　(b)命题:设函数 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$在区域 Ω 及其正向边界Σ上有连续偏导数,则 $\iiint_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}V=\iint_{\Sigma}uv\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}V$.

2.(a)5π.　(b)0.　(c)$\pi a^2(e^{2a}-1)$.

3.(a)4π.

4.(a)4π.

5.(a)仿本例证明.

6.(a)仿本例证明.　(b)仿本例证明.0.

7.(a)仿本例证明.　(b)用习题(a).　(c)仿本例证明.

8.(a)$\frac{3}{256}\pi R^7$.　(b)0.　(c)先代入曲线方程.0.

9.(a)(1)$-\frac{2\pi a^2}{b}(b+c)$.(2)-2π.　(b)(1)$-\sqrt{3}\pi a^2$.(2)$-\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$.

10.(a)闭曲线.0.

11.(a)$-x^3-y^3-z^3+xyz$.

12.(a)$\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$.　(b)$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

第八节　多元积分的应用

1.(a)$4\pi-8$.　(b)$\sqrt{2}\pi$.　(c)$a^2\left(\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}\right)$.

2.(a)$\frac{5}{6}$.　(b)π.　(c)切点为(1,0,2).最小体积$\frac{\pi}{2}$.

3.(a)$\frac{28}{9}$.　(b)$\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{27}$.　(c)$\frac{\pi}{2}$.

4.(a)令 $u=\frac{y^2}{2x},v=\frac{x^2}{2y}$.　$\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$.　(b)令 $u=\frac{x^3}{y^2},v=\frac{y^3}{x^2}$.　$\frac{1}{5}(q-p)(s-r)$.

(c)令 $x=ar\cos^4\theta,y=br\sin^4\theta$.　$\frac{ab}{6}$.

5.(a)令 $u=\frac{x}{a}-\frac{1}{2},v=\frac{y}{b}-\frac{1}{2}$.$\frac{1}{8}\pi abc$.　(b)令 $u=\frac{x^2}{y},v=\frac{y^2}{x}$.$\frac{3}{4}$.

6.(a)用$(x-y)[f(y)-f(x)]f(x)f(y)\geqslant 0$.　(b)用$[f(y)-f(x)]^2\geqslant 0$.(c)用$[f(y)-f(x)]^2\geqslant 0$.

7.(a)用施瓦兹不等式与本例.　(b)仿本例证明.

8.(a)用 $\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$.$\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$.　(b)用$\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y=-\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}$.　$\ln\frac{a}{b}$.　(c)用$\int_a^b\frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y=\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}$.$\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

9.(a)换元 $u=x+\frac{1}{x}$.　$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2}$.　(b)换元 $u=\sqrt{\ln\frac{1}{x}}$.　$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.　(c)记 $D_1:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,D_2:x^2+y^2\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0$,则定积分的平方介于在这些区域上的二重积分之间.

10.(a)用球坐标系. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

11.(a)令 $x=ar^3\sin^3\varphi\cos^3\theta, y=ar^3\sin^3\varphi\sin^3\theta, z=ar^3\cos^3\varphi$. $\frac{4}{35}\pi a^3$. (b)用广义球坐标系. $\frac{5}{12}(3-\sqrt{5})\pi abc, \frac{1}{12}(1+5\sqrt{5})\pi abc$. (c)令 $u=a_1x+b_1y+c_1z, v=a_2x+b_2y+c_2z, w=a_3x+b_3y+c_3z$. $\frac{8d_1d_2d_3}{|\Delta|}$.

12.(a)只算第一卦限的部分. $16a^2$.

13.(a)令 $y=tx$ 得曲线的参数方程. $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. (b)用参数方程. $\frac{3\pi a^2}{2}$.

14.(a)用本例. $V=\frac{1}{3}RS$

第七章　级　数　论

第一节　级数的定义和性质

例 1　求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 收敛，并求其和.

证:用定义证明级数收敛.

级数的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$，所以级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

习题　求证下列级数收敛，并求其和.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$，其中 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$.

例 2　求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 收敛，并求其和.

证:用定义证明级数收敛.

改写，得 $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. 于是，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$，所以级数收敛于 1.

习题

(a) 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+5}{(n+3)!}$ 收敛，并求和.

(b) 设 $a_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1$.

例 3　求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 收敛，并求其和.

证:用定义证明级数收敛.

级数的部分和 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$. 在等式的两端同时乘以 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+$

$\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$. 两式相减，得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，于是

$$S_n=3-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，所以级数收敛于 3.

习题 求证下列级数收敛，并求其和.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{bn+c}{a^n}(a>1)$.

例 4* 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 收敛，并求其和.

证:用定义证明级数收敛.

对于级数的部分和，先计算几个例子，猜测一般结果，再予以证明.

$$S_1=\arctan\frac{1}{2}.$$

$$S_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3}.$$

$$S_3=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4}.$$

猜测 $S_n=\arctan\frac{n}{n+1}$. 可以用数学归纳法证明这个猜测.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，所以级数收敛于$\frac{\pi}{4}$.

习题 求证下列级数收敛，并求其和.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2+1}$.

例 5* 求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，并求其和.

证:用定义证明级数收敛.

在第三章第三节例 11，证明了数列 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ 有极限.

考虑级数的部分和数列的一个子列，

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=(T_{2n}+\ln(2n))-(T_n+\ln n)=T_{2n}-T_n+\ln 2.\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$，根据第一章第四节例3习题(a)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

习题 求证下列级数收敛，并求其和.

(a) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$

评述:习题(b)中的级数可以看作将本例中级数的项重新排列而成. 计算结果表明：交换律对于级数不成立. 关于级数加括号的定理的逆定理不成立，说明结合律也是不成立的. 因此，级数作为无穷多项的和，与中学代数中处理的有限项的和是有本质的区别的. 切不可将那里的东西不加证明就用到级数中来.

例6 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n$恒不等于零，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证:用定义和性质研究收敛性.

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$收敛，由必要条件，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$. 于是，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

习题

(a) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的通项$u_n$与其部分和$S_n$满足方程$2S_n^2=2u_nS_n-u_n, n\geqslant 2$. 求证级数收敛并求其和.

例7 设数列$\{u_n\}$满足：(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛；(2) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证:用定义证明级数收敛.

由第一个条件，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})$有极限，记为$S$. 再由第二个条件，有$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=S$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即级数收敛于$S$.

评述:由关系$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$和$u_n=S_n-S_{n-1}$，一个关于$u_n$的(即关于级数的)概念可以翻译成关于$S_n$的(即关于数列的)概念，反之亦然. 例如：将数列的子列翻译成级数的语言，就是给级数加括号后所得的新级数；而单调增加的数列，则相当于正项级数. 实际上，级数的收敛与数列的有极限是同一种现象的两种不同表示. 分工原则是：将用S_n处理比较方便的材料放在极限论中，而将用u_n处理比较方便的材料放在级数论中.

习题

(a) 求证级数$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^22}-\frac{1}{2^23}+\frac{1}{2^42}-\frac{1}{2^43}+\cdots$收敛，并求其和.

(b) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件为：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$与$u_1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n+1})$收敛于相同的和.

评述:这个命题等价于第一章第四节例 3.

例 8　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证:用定义证明级数收敛.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 的和分别为 R，S. $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和分别记作 R_n，S_n 和 T_n，则 $T_{2n} = R_n + S_n$，$T_{2n-1} = R_n + S_{n-1}$. 于是，$\lim_{n\to\infty} T_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} T_{2n} = R + S$. 因此，$\lim_{n\to\infty} T_n = R + S$.

习题

(a) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，令 $w_{2n-1} = u_n$，$w_{2n} = v_n$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛.

(b) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$，求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

例 9*　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足：(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛；(2) 极限 $\lim_{n\to\infty} nu_n$ 存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证:用定义证明级数收敛.

将部分和改写，得

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = (u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + \cdots + (n-1)(u_{n-1} - u_n) + nu_n .$$

根据问题中的两个条件，极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，即级数收敛.

习题

(a) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛.

(b) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ 收敛.

例 10　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 发散.

证:级数性质 1 与性质 2.

用反证法. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，由级数的运算定理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n + v_n) - u_n]$ 收敛,与已知矛盾.

评述:这个命题可以看作性质 2 的补充. 同样的，习题(a) 是性质 1 的补充.

习题

(a) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，常数 $c \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 发散.

(b) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 收敛.

例 11　求证:级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 10}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3\cdot 10}+\cdots$发散.

证:性质 4 的逆否命题.

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)$发散. 再由性质 4 的逆否命题，原级数发散.

评述:性质 4 与必要条件一样,经常用它的逆否命题证明发散.

习题

(a) 求证：级数$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$发散.

例 12　求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$发散.

证:必要条件.

计算极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n=1}}.$$

根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

习题

(a) 求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$发散.

(b) 求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，其中$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

第二节　正项级数审敛法

例 1*　设$u_n>0$，记$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛.

证:用正项级数收敛的充分必要条件.

当$n\geqslant 2$时，有

$$\frac{u_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}.$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{S_k^2}<\frac{1}{u_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)=\frac{2}{u_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{u_1}.$$

根据充分必要条件，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛.

习题

(a) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，记 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ 收敛.

(b) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ 收敛.

例 2　设数列 $u_n > 0$ 单调增加且有上界，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛.

证:用正项级数收敛的充分必要条件.

因为数列 $u_n > 0$ 单调增加且有上界,所以存在 $M > 0$,使得 $u_n \leqslant M$;于是

$$S_n = \frac{u_2 - u_1}{u_2} + \cdots + \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{u_{n+1} - u_1}{u_2} \leqslant \frac{M - u_1}{u_2}.$$

即 S_n 有上界,根据充分必要条件，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛.

习题

(a) 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$收敛.

例 3*　设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ 发散.

证:用正项级数收敛的充分必要条件.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 于是，对于任意给定的自然数 n，存在自然数 p，使得 $S_{n+p} \geqslant 2S_n$. 从而

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k}{S_k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

由此可证：数列$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k}$ 无上界. 根据充分必要条件，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ 发散.

习题

(a) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，记 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_{n-1}}$ 发散.

(b) 设数列 $u_n > 0$ 单调增加趋向于正无穷，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$发散.

例 4* 设数列 $u_n > 0$ 单调减少趋向于 0，又设存在常数 $M > 0$，使得对于任意自然数 n，有$\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k - u_n) \leqslant M$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证:用正项级数收敛的充分必要条件.

由问题中的条件，有 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant M + nu_n$. 根据正项级数收敛的充分必要条件，只需证明数列 nu_n 有上界.

对于任意取定的自然数 n，令 $m > n$，由数列 u_n 单调减少趋向于 0，有

$$M \geqslant \sum_{k=1}^{m}(u_k - u_m) \geqslant \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_m) \geqslant n(u_n - u_m).$$

令 $m \to \infty$，即得 $M \geqslant nu_n$.

习题

(a) 设 $u_n > 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{(u_1+1)(u_2+1)\cdots(u_n+1)}$ 收敛.

评述:与本章第一节例 2 习题(b) 比较.

(b) 如果将正项级数加括号后所得的新级数收敛，则原级数也收敛.

问题:写出数列极限中与此等价的命题.

例 5*　设数列 $u_n > 0, v_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}v_n - v_{n+1}\right) = a > 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证:用正项级数收敛的充分必要条件.

因为 $u_n > 0, v_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}v_n - v_{n+1}\right) = a > 0$,所以存在常数 $m > 0$ 和自然数 N,当 $n > N$ 时,$u_nv_n - u_{n+1}v_{n+1} > mu_{n+1} > 0$,从而 $u_nv_n > 0$ 单调递减,于是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n$ 存在. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{N+n}v_{N+n} - u_{N+n+1}v_{N+n+1})$ 的部分和 $u_{N+1}v_{N+1} - u_{N+n+1}v_{N+n+1}$ 有界,则该级数收敛. 当 $n > N$ 时,$u_nv_n - u_{n+1}v_{n+1} > mu_{n+1} > 0$,因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mu_{N+n}$ 收敛,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

习题

(a) 设数列 $u_n > 0$，又 $v_1 = 1, v_{n+1} = v_n + \dfrac{u_n}{v_n}$，求证:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是:数列 $\{v_n\}$ 有极限.

(b) 设数列 $u_n > 0$ 单调减少，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ 收敛.

例 6　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

证:用正项级数的比较审敛法.

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3n\sqrt{n}}.$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 收敛.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.

例 7 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$收敛.

证:用正项级数的比较审敛法.

易见$\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$. 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$收敛. 根据比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$收敛.

习题

(a) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$收敛.

(b) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$发散.

(c) 设$u_n > 0$，数列$\{n^2 u_n\}$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

例 8 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

证:用正项级数的比较审敛法.

因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 根据极限定义，存在$N > 0$，使得当$n > N$时，有$0 < u_n < 1$. 于是$0 < u_n^2 < u_n$. 根据比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

习题

(a) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，且$u_n \neq 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1-u_n}$收敛.

(b) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$收敛.

例 9 设$u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \geqslant 3$,求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$收敛.

证:用正项级数的比较审敛法.

先用数学归纳法证明:$u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.已知$u_1 = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0, u_2 = 2 > \frac{3}{2}$,设不等式对于下标$n$和$n+1$成立，则

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

于是,$0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$收敛，根据比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$收敛.

习题

(a) 设数列x_n是按递增顺序排列的方程$x = \tan x$的正根，求证：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$收敛.

(b) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，则对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

(c) 从不等式 $\ln(1+x) < x, x > 0$ 出发，求证调和级数发散.

例 10 设 $u_n > 0, v_n > 0$ 满足不等式 $v_1 \geqslant u_1, v_{n+1} + u_n \geqslant u_{n+1} + v_n$.

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证:用正项级数的比较审敛法.

由 $v_{n+1} + u_n \geqslant u_{n+1} + v_n$，得 $u_{n+1} - u_n \leqslant v_{n+1} - v_n$. 于是

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &\leqslant (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \cdots + (v_2 - v_1) + v_1 = v_n. \end{aligned}$$

由比较审敛法即得.

习题

(a) 设 $u_n > 0, v_n > 0$ 满足不等式 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$，

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 11 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 的收敛性.

解:用正项级数的比较审敛法的极限形式.

有理化，得

$$\begin{aligned} &\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}. \end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = -\frac{1}{4}$，根据比较审敛法的极限形式，级数收敛.

习题

(a) 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} - 1} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$ 的收敛性.

(b) 求常数 a 的取值范围，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n^a}$ 收敛.

例 12 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ 的收敛性.

解:由 $3^{\ln n} = n^{\ln 3}$，而 $\ln 3 > 1$，故级数收敛.

习题

(a) 求常数 a 的取值范围，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{a\ln n}}$ 收敛.

(b) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的收敛性.

例 13　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+bn)^{s}}(a>0,b>0)$ 的收敛性.

解: 用正项级数的比较审敛法的极限形式.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^s}}=\dfrac{1}{b^s}$，根据比较审敛法的极限形式，当 $s>1$ 时，级数收敛；当 $s\leqslant 1$ 时，级数发散.

评述: 对于有解析表达式的级数，计算极限一般比证明不等式容易. 因此，经常用的是比较审敛法的极限形式.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{n}-\dfrac{b}{n+1}\right)$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$.

例 14　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，又 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(u_n-v_n)=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

证: 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(u_n-v_n)=1$，则当 n 充分大时，$u_n-v_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-v_n}{\frac{1}{n^2}}=1$. 根据正项级数的比较审敛法的极限形式，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 收敛. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，由级数性质 2，有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n-(u_n-v_n)]$ 收敛.

习题

(a) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=A>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(b) 设 $x_0>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛.

[提示: 参看第一章第七节例 8 习题(b).]

例 15　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$ 的收敛性.

解: 用正项级数的比较审敛法的极限形式.

转换成函数的极限，用洛必达法则.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{e^{\sqrt{n}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}}=0.$$

根据比较审敛法的极限形式，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2$.

例 16* 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$的收敛性.

解:先用泰勒公式确定通项的阶，再用比较审敛法的极限形式.

$$\begin{aligned} u_n &= n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1 = n\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)-1 \\ &= n\left[\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-1 \\ &= \frac{2n+3}{3(2n-1)^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{12}$，根据比较审敛法的极限形式，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right]$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

例 17 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$的收敛性.

解:用正项级数的比值审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1.$$

根据比值审敛法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$收敛.

评述:当级数的通项是阶乘或幂时，用比值审敛法比较方便.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}$.

例 18 研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!a^n}{n^n}(a>0)$的收敛性.

解:用正项级数的比值审敛法.

计算极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}.$$

根据比值审敛法，当 $0<a<e$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!a^n}{n^n}(a>0)$收敛；当 $a>e$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!a^n}{n^n}(a>0)$发散；当$a=e$时，比值审敛法失效. 不过由$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\geqslant 1$，可得 $u_n\geqslant u_1=e$. 由必要条件，级数发散.

习题

(*a*) 研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}(a>0,p>0)$的收敛性.

(*b*) 研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^q n}{n^p}(p>0,q>0)$的收敛性.

例 19 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$的收敛性.

解:用正项级数的根值审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}=0.$$

根据根值审敛法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+2}}{(2n+1)^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$.

例 20* 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}=q$,

(1) 如果 $q>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

(2) 如果 $q<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(3) 如果 $q=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，也可能发散.

证:正项级数审敛法的讨论与推广.

(1) 假定 $q>1$，取 $1<s<q$. 根据极限定义，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}>s>1$. 改写得 $u_n<\dfrac{1}{n^s}$. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 收敛，根据比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

同理可证(2). 举例可证(3).

评述:这个命题称为对数审敛法.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

(b) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\left(1-\dfrac{a\ln n}{n}\right)^n$.

例 21*　设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=q$,

(1) 如果 $q>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 如果 $q<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 如果 $q=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散.

证:正项级数审敛法的讨论与推广.

(1) 假定 $q>1$，取 $1<s<q$，令 $v_n=\dfrac{1}{n^s}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}-1\right)=s$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)=q-s>0.$$

根据极限定义，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right)>0$，即 $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}>\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 收敛，由本节例 10 习题(a)，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

同理可证(2)，举例可证(3).

评述:这个命题称为拉阿伯(Raabe)审敛法. 比值审敛法和根值审敛法是以等比级数为模型设计的，因此,它们对于 p—级数无能为力. 对数审敛法和拉阿伯审敛法是以 p—级数为模型设计的，应用范围较广.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}(x>0)$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n(n+1)/2}}{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}(x>0)$.

例 22* 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p,0\leqslant p\leqslant+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$.

证: 正项级数审敛法的讨论与推广.

记 $v_n=\sqrt[n]{u_n}$，用 Stolz 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(\ln u_{n+1}-\ln u_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ln p.$$

评述: 这个命题表明：在理论上，凡是能用比值法判定收敛性的级数，也可以用根值法判定. 注意：逆命题不成立. 本节例 6 习题(a) 就是一个反例.

习题

(a) 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$，$0<p<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=+\infty$.

(b) 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$，$0<p<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=+\infty$.

(c) 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=p$，$0\leqslant p\leqslant+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=p$.

例 23* 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的收敛性.

解: 正项级数审敛法的讨论与推广.

用正项级数的积分审敛法.

因为广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 发散，根据积分审敛法，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$.

(b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$.

例 24* 设 $u_n>0$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证: 收敛级数的性质.

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. 根据级数收敛定义，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，因此

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n})=0.$$

因为 $u_n>0$ 单调减少，所以

$$0<nu_{2n+1}\leqslant nu_{2n}\leqslant u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}.$$

根据极限存在准则 1，有 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

评述: 这个例题是第三章第九节例 15 习题(b) 的离散类比.

习题

(a) 设 $u_n>0$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n+1})$ 收敛.

(b) 设 $u_n>0$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(c) 设 $u_n>0$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

第三节　一般项级数的审敛法

例 1　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}$ 的收敛性.

解: 交错级数.用莱布尼兹审敛法.

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}=0$. 又 $\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}-\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+1}}=\dfrac{(n+1)^{5/2}-n^{3/2}(n+2)}{n\sqrt{n}(n+1)\sqrt{n+1}}>0$. 根据莱布尼兹审敛法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}$ 收敛.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$.

例 2　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ 的收敛性.

解: 交错级数.用莱布尼兹审敛法.

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}=0$. 考虑函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+10}$,求导得 $y'=\dfrac{10-x}{2\sqrt{x}(x+10)^2}$. 当 $x>10$ 时,函数单调减少. 于是当 $n>10$ 时,数列 $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ 单调减少. 根据莱布尼兹审敛法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ 收敛.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

例 3*　设正项数列 u_n 单调减少趋向于零,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ 收敛.

证: 交错级数.用莱布尼兹审敛法.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，由第一章第二节例 7，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=0$. 另一方面，有

$$\frac{u_1+u_2+\cdots u_n+u_{n+1}}{n+1}-\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\frac{nu_{n+1}-u_1-u_2-\cdots-u_n}{n(n+1)}<0$$

根据莱布尼兹审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ 收敛.

习题

(a) 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln[\sqrt[2n]{2}\sqrt[3n]{3}\cdots\sqrt[n^2]{n}]$ 收敛.

(b) 设正项数列 u_n 单调减少趋向于零，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{u_1u_2\cdots u_n}$ 收敛.

(c) 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ 收敛.

例 4* 设 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=q>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 收敛.

证：交错级数. 用莱布尼兹审敛法.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=q>0$，令 $0<s<q$. 根据极限定义，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>s>0$. 即$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{1+\frac{s}{n}}<1$. 于是，数列 u_n 单调减少. 另一方面，

$$u_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdots\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}u_{N+1}<\frac{1}{1+\frac{s}{n}}\frac{1}{1+\frac{s}{n-1}}\cdots\frac{1}{1+\frac{s}{N+1}}u_{N+1}$$

$$<\frac{u_{N+1}}{1+s(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{N+1})}.$$

因为调和级数发散，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 根据莱布尼兹审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!2^n}$.

例 5* 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^n}$的收敛性.

解：交错级数. 用级数的部分和数列的子列判定收敛.

这个级数不满足莱布尼兹审敛法中的单调条件. 考虑部分和数列的一个子列：

$$S_{2n}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}.$$

这也是收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的部分和数列的子列，因此，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$存在. 另一方面，

极限$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^n}=0$,由本章第一节例 7,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^n}$ 收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+2(-1)^n}}$.

例 6* 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的收敛性.

解:交错级数，其他方法.

将一般项的分子分母同乘以$\sqrt{n}-(-1)^n$，得

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}.$$

因为以$\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$为一般项的级数收敛，而以$\frac{1}{n-1}$为一般项的级数发散，所以原级数发散.

习题

(a) 用本例的方法研究本节例 5.

(b) 判断级数$\frac{1}{1}-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$的收敛性.

例 7 设 $v_n>0$ 单调减少，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ 发散，研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+v_n}\right)^n$ 的收敛性.

解:交错级数.

已知 $v_n>0$ 单调减少，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ 发散，则有 $\lim_{n\to\infty}v_n=A>0$，而且 $v_n\geqslant A$.

于是，$\left(\frac{1}{1+v_n}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{1+A}\right)^n$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+A}\right)^n$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法，原级数收敛.

习题

(a) 设 $v_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ 收敛. 又设 $u_n>0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 是否一定收敛?

例 8 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{n^2}$ 的收敛性.

证:用绝对收敛定理判定收敛.

因为$\left|\frac{\sin n^2}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较审敛法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n^2}{n^2}\right|$ 收敛. 再根据绝对收敛定理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{n^2}$ 收敛.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2x)\sin\frac{x}{n^2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$, $a>0$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{n^2}$，其中 p_n 取值 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 9$.

例 9 设常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的收敛性.

证:用绝对收敛定理判定收敛.

因为$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda})<a_n^2+\frac{1}{n^2}$，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛.

习题

(a) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\arctan\frac{a_n}{n}$ 的收敛性.

(b) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$|b_n-a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(c) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，数列$\{b_n\}$有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例 10 设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

证:用绝对收敛定理判定收敛.

由函数 $f(x)$在点 $x=0$ 可导，及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，可得 $f(0)=f'(0)=0$.

将函数 $f(x)$在点 $x=0$ 展开，得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2$. 根据 $f(x)$在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的二阶导数，存在 $\delta>0, M>0$，使得当$|x|<\delta$ 时，有 $|f''(x)|\leqslant M$. 于是，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}\frac{1}{n^2}\right|\leqslant\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}\ .$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛. 再根据绝对收敛定理，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 收敛.

习题

(a) 设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的一个邻域内有连续的二阶导数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛的充分必要条件为$f(0)=f'(0)=0$.

(b) 设偶函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的二阶导数，且 $f(0)=1$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 收敛.

例 11　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 的收敛性.

解:用绝对值判定发散.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4>1\ .$$

因此，原级数发散.

习题　判断下列级数的收敛性.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n\sin\frac{\pi}{n^2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$.

例 12　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p+n}{n^2}, p>0$ 的收敛性 .

解:用定义判定绝对收敛或条件收敛.

因为 $\frac{p+n}{n^2}>\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p+n}{n^2}$ 发散.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛;所以原级数条件收敛.

习题　讨论下列级数的收敛性.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^{p+1}+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+an+b}{n}\pi$.

例 13*　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 经过加括号后所得新级数 $\sum_{m=1}^{\infty}U_m$ 收敛，且每个括号内的各项具有相同的符号，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于相同的和.

证:级数运算定理的讨论与推广.

因为新级数 $\sum_{m=1}^{\infty}U_m$ 收敛，所以 $\lim_{m\to\infty}U_m=0$. 然而 $U_m=u_{n_{m-1}+1}+u_{n_{m-1}+2}+\cdots+u_{n_m}$ 中各项符号相同，于是对于任意的自然数 n，存在自然数 m，使得 $n_{m-1}<n\leqslant n_m$，因此有

$$\sum_{h=1}^{m-1}U_h-|U_m|\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\sum_{h=1}^{m}U_h+|U_m|\ .$$

令 $n\to\infty$，根据极限存在准则 1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于级数 $\sum_{m=1}^{\infty}U_m$ 的和.

评述:如果一个级数只有有限个正项，或者只有有限个负项，则可以将它化为正项级数讨论；如果一个级数既有无穷多个正项，又有无穷多个负项，有时可以将它化为交错级数讨论.

习题 判断下列级数的收敛性.

(a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}}$.

例 14 设 $u_n\leqslant w_n\leqslant v_n$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 收敛.

证:级数运算定理的讨论.

由 $u_n\leqslant w_n\leqslant v_n$，得 $0\leqslant w_n-u_n\leqslant v_n-u_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-u_n)$ 收敛. 根据正项级数比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-u_n)$ 收敛. 于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{n=1}^{\infty}[(w_n-u_n)+u_n]$ 收敛.

习题

(a)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 发散.

例 15* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛的充分必要条件为：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 都收敛.

证:条件收敛级数的性质.

两个正项级数分别由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中的正项和负项与 0 组成.

必要性：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，$\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)\leqslant|u_n|$，$\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)\leqslant|u_n|$，根据正项级数的比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 收敛.

充分性:因为 $|u_n|=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)+\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

习题

(a)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 条件收敛.

例 16* 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 都发散. 这两个级数的部分和分别记作 R_n 和 T_n，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{T_n}=1$.

证:条件收敛级数的性质,反证法.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}[(|u_n|-u_n)+u_n]$ 收敛，与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛矛盾;因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 发散.同理 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 发散.

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，$P_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 是一个有限值，而 $\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(P_n - S_n)}{\frac{1}{2}(P_n + S_n)} = 1.$$

习题

(a) 求证：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

(b) 设 $u_n > 0$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，求证：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_3+\cdots+u_{2n-1}}{u_2+u_4+\cdots+u_{2n}} = 1$.

第四节　幂　级　数

例 1　求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n|x|^n}$，$x \neq 0$ 的收敛域.

解：改写，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n|x|^n} = \begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} & x > 0\\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} & x < 0\end{cases}$. 根据常数项级数的结果，函数项级数的收敛域为 $(-\infty, 0)$.

评述：常数项级数是数列的另一种表现形式. 类似的，函数项级数的另一种形式是函数序列. 不过，这方面的内容超出了我们教材的范围.

习题　求下列函数项级数的收敛域.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n})}$.

例 2　求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^{2n}x^n}$ $(a>0)$ 的收敛域.

解：计算极限. 仅当 $|x| > \dfrac{1}{a^2}$ 时，有 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^{2n}x^n} = 0$.

当 $|x| > \dfrac{1}{a^2}$ 时，$\left|\dfrac{1}{1+a^{2n}x^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{a^{2n}|x|^n - 1} \leqslant \dfrac{2}{a^{2n}|x|^n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{2n}|x|^n}$ 收敛，由比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^{2n}x^n}$ 的收敛域为 $(-\infty, -\dfrac{1}{a^2}) \cup (\dfrac{1}{a^2}, +\infty)$.

习题　求下列函数项级数的收敛域.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}$，$p > 0$.

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛半径.

解:用比值法求幂级数收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$$

根据比值法，幂级数的收敛半径等于$\frac{1}{e}$.

习题 求下列幂级数的收敛区间.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})x^n$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中 $a_0>0$，$a_{n+1}=a_n+d\ (d>0)$.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}(a>0)$ 的收敛区间.

解:用比值法求幂级数收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{-\sqrt{n+1}}}{a^{-\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1.$$

根据比值法，幂级数的收敛半径等于 1.

当 $x=1$ 时，如果 $0<a\leqslant1$，级数的通项不趋向于 0，级数发散. 如果 $a>1$，用正项级数的对数审敛法，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a^{\sqrt{n}}}{\ln n}=+\infty\ .$$

级数收敛. 同样讨论 $x=-1$.

总之，如果 $0<a\leqslant1$，收敛区间为$(-1,1)$；如果 $a>1$，收敛区间为$[-1,1]$.

习题 求下列幂级数的收敛区间.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+a^n}$，$a>0$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln n}$，$p>0$.

例 5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{b^{n^2}}x^n(b\neq0)$ 的收敛区间.

解:用根值法求幂级数收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{|b|^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|b|^n}=\begin{cases}0,|b|>1\\+\infty,|b|\leqslant1.\end{cases}$$

根据根值法，如果$|b|>1$，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$；如果$|b|\leqslant1$，幂级数只在点 $x=0$ 收敛.

习题 求下列幂级数的收敛区间.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{n}x^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+7^n}$.

例 6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的收敛区间.

解:用常数项级数的比值审敛法求幂级数的收敛半径.

因为偶数项的系数等于0，比值法和根值法均无效. 对于任意取定的 x，可以将幂级数看作常数项级数，用正项级数的比值审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+3)!!}x^{2n+3}}{\frac{n!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}x^2=\frac{x^2}{2}.$$

根据正项级数的比值审敛法，当$\frac{x^2}{2}<1$，即$|x|<\sqrt{2}$时，级数收敛；当$\frac{x^2}{2}>1$，即$|x|>\sqrt{2}$时，级数发散. 于是幂级数的收敛半径等于$\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$时，用正项级数的 Raabe 审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{n!}{(2n+1)!!}(\sqrt{2})^{2n+1}}{\frac{(n+1)!}{(2n+3)!!}(\sqrt{2})^{2n+3}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

根据 Raabe 审敛法，级数发散. 同理可证 $x=-\sqrt{2}$时，级数发散. 于是，幂级数的收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

评述:对于变量 x 的任意给定的值，函数项级数成为常数项级数. 因此，也可以说函数项级数是一族具有相似结构的常数项级数. 于是，当幂级数的定理无效时，自然要考虑常数项级数的定理.

习题 求下列幂级数的收敛区间.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+1}{4n+1}x^{4n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\ln(n^2+1)}x^{3n-2}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$.

例 7 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{4^n n}$ 的收敛域.

解:广义幂级数的收敛域.

令 $u=x-2$，考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n}}{4^n n}$. 用本节例 6 的方法，当 $-2<u<2$ 时收敛. 于是，原

级数当 $0<x<4$ 时收敛.

习题

(a) 设函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 在点 $x=0$ 处收敛，在点 $x=2b$ 处发散，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

(b) 设函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $(-1,3]$，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛区间.

例 8 设函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在点 $x=-1$ 处收敛，则在点 $x=6$ 处绝对收敛.

解: 广义幂级数的收敛域.

令 $u=x-3$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 在点 $u=-4$ 收敛，所以当 $-4<u<4$ 时收敛. 而 $x=6$ 时，$u=3$ 在收敛区间内，于是，原级数当 $x=6$ 时绝对收敛.

习题

(a) 设函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x=-1$ 处收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(b) 设函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 处收敛，求常数 a 的取值范围.

例 9 计算函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解: 广义幂级数的收敛域.

令 $u=\frac{1-x}{1+x}$，考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} u^n$. 用前面例中的方法，这个幂级数的收敛区间为 $(-1,1]$. 解不等式 $-1<\frac{1-x}{1+x}\leqslant 1$，得 $x\in[0,+\infty)$. 这就是本例中函数项级数的收敛域.

习题 求下列函数项级数的收敛域.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n(1-x)^n$.

例 10 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ 的收敛域.

解: 广义幂级数的收敛域.

令 $u=xe^{-x}$，考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$. 用前面例中的方法，这个幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 解不等式 $-1<xe^{-x}<1$，记方程 $e^x=-x$ 的唯一根为 x_0，得 $x\in(x_0,+\infty)$. 这就是本例中函数项级数的收敛域.

习题 求下列函数项级数的收敛域.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\sin^n x$.

例 11* 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别等于 r 和 R，如果对于任意自然数 n，有 $|a_n| \geqslant |b_n|$，则 $r \leqslant R$.

证: 幂级数运算定理的讨论.

设点 $|x| < r$，根据阿贝尔第一定理，常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. 因为 $|b_n||x|^n \leqslant |a_n||x|^n$，根据正项级数的比较审敛法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n$ 收敛. 根据绝对收敛定理，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛. 于是 $R \geqslant r$.

评述: 这个命题似乎可以看作幂级数收敛半径的比较法.

习题

(a) 设数列 a_n 有界，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1.

(b) 对于数列 a_n，如果存在正数 p 和 q，使得对于任意自然数 n，有 $\frac{1}{n^p} \leqslant |a_n| \leqslant n^q$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1.

(c) 设数列 $a_n, b_n \neq 0$ 满足 $0 < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < +\infty$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径相等.

例 12* 设 $a_n \geqslant 0$，记 $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. 如果 $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1.

证: 用比较法求收敛半径.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ 的收敛半径分别等于 r 和 R. 因为 $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$，根据极限定义，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，有 $A_n > 0$. 又因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$，所以

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - a_n}{A_n} = 1.$$

因为 $a_n \geqslant 0$，所以 $a_n \leqslant A_n$. 由本节例 11，得 $r \geqslant 1$. 最后，由 $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处发散. 于是，收敛半径 r 等于 1.

习题

(a) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 的收敛区间.

(b) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{p_n}$ 的收敛区间，其中 p_n 是第 n 个质数.

例 13* 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 r 和 R，且 $r<R$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径等于 r.

证：幂级数运算定理的讨论.

用常数项级数的运算定理. 改写，得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n+b_n x^n)$. 根据已知条件，对于取定的 $|x|<r$，等式右端是两个收敛级数的和，因此收敛；当 $r<|x|<R$ 时，等式右端是一个收敛级数和一个发散级数的和，因此发散. 于是，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径等于 r.

评述：幂级数和的定理可以写作：设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径分别为 r_1、r_2 和 R，则 $R\geqslant\min\{r_1,r_2\}$. 本例说明，当 $r_1\neq r_2$ 时，此式中等号成立. 换句话说，只有 $r_1=r_2$ 时，才可能不等号成立.

习题

(a) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$ 的收敛区间.

(b) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 R，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right|=p<1$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径也等于 R.

例 14 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1，记 $A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ 的收敛半径也等于 1. 而且，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $f(x)$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ 的和函数为 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$.

证：用幂级数乘积的定理.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ 的收敛半径等于 R. 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$，而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1，根据幂级数乘积的定理，有 $R\geqslant1$. 另一方面，因为 $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，根据幂级数乘积的定理，有 $R\leqslant1$. 于是 $R=1$.

因此，当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ 都收敛，且它们的和函数满足方程 $(1-x)F(x)=f(x)$.

习题

(a) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 R，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+5}$ 的收敛半径也等于 R.

例 15 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 R，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径.

解:用幂级数乘积的定理.

先考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$. 令 $u=x^2$, 因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ 的收敛半径等于R, 所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径等于$\sqrt{R}$.

再由本节例 14 习题(a), 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径也等于$\sqrt{R}$.

习题

(a) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为$[-8,8)$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+2}$ 的收敛区间.

(b) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于R, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} e^{nx}$ 的收敛域(不必讨论端点).

(c) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间(不必讨论端点).

例 16*　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数不全为零, 且存在自然数 p, 使得对于任意的自然数 n, 有 $a_{n+p}=a_n$, 则幂级数的收敛半径等于 1, 和函数为 $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}}{1-x^p}$.

证:特殊类型的幂级数.

因为幂级数的系数是周期的, 所以它们有界, 由本节例 11 习题(a), 幂级数的收敛半径不小于 1; 因为幂级数的系数是周期的, 且不全为零, 根据常数项级数收敛必要条件, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散. 于是, 幂级数的收敛半径等于 1.

因为 $(1-x^p)\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}$, 而此式中的三个幂级数都在区间$(-1,1)$收敛, 所以$(1-x^p)f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}$.

习题

(a) 设 $a_0=a>0$, $a_n=a_{n-1}+d$, 求证: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1, 而和函数为 $f(x)=\dfrac{a+(d-a)x}{(1-x)^2}$.

例 17　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为$(-1,1)$, 且存在 $C>0$, 使得$|a_n|\leqslant\dfrac{C}{\sqrt{n}}$, 求该幂级数经逐项积分产生的幂级数的收敛区间.

解:逐项积分产生的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 1.

已知$|a_n|\leqslant\dfrac{C}{\sqrt{n}}$, 则$\dfrac{|a_n|}{n+1}\leqslant\dfrac{C}{(n+1)\sqrt{n}}$. 由正项级数的比较审敛法, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n+1}$ 收敛. 于是, 当$|x|=1$时, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 绝对收敛. 因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛区间

为$[-1,1]$.

评述：如果幂级数在收敛区间的端点发散，经逐项积分产生的幂级数可能在端点收敛.

习题

(a) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于4，求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n(n-1)} x^n$ 的收敛半径.

例 18 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 的和函数为 $y=f(x)$，则 y 满足微分方程 $xy''+y'=y$.

证：用幂级数的逐项微分定理.

将 $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 求导，得 $y'=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!}$. 在此式的两端同时乘以 x，得 $xy'=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n-1)!}$. 再求导，得

$$xy''+y'=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}=y .$$

所有的等式均在区间$(-\infty,+\infty)$内成立.

评述：在逐项微分和逐项积分时，要特别留心幂级数的前面几项的变化.

习题

(a) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}$ 的和函数为 $y=f(x)$，则 y 满足微分方程 $xy''+(1-x)y'=1$.

(b) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ 的和函数为 $y=f(x)$，则 y 满足积分方程

$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(x)-1]$.

例 19 设数列 a_n 满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}=0$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间$(-1,1)$内收敛. 和函数记作 $f(x)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证：特殊类型的幂级数.

因为数列 a_n 满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}=0$，所以当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}=0$ 收敛，由阿贝尔定理可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间$(-1,1)$内收敛.

已知 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$，且 $F(0)=F(1)=0$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$.

习题

(a) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 $K>0$，且对于任意的自然数 n，有 $(2n-1)a_{2n-1}>2Kn|a_{2n}|$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数单调增加.

第五节 泰勒级数

例 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a-h,a+h)$ 内有任意阶导数，且存在常数 $M>0$，使得对于任意的自然数 n 和任意的实数 $x\in(a-h,a+h)$，有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$，则在区间 $(a-h,a+h)$ 内，有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

证：用定理直接展开.

函数 $f(x)$ 的泰勒公式的拉格朗日余项

$$|R_{n-1}(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right||x-a|^n\leqslant\frac{M}{n!}h^n\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty.$$

因此，在区间 $(a-h,a+h)$ 内，有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内有任意阶导数，且存在常数 $M>0$，$K>0$，使得对于任意的自然数 n 和任意的实数 $x\in(-R,R)$，有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant Me^{kn|x|}$，则在区间 $(-R,R)$ 内，有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

(b) 求证：函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数，但是它的麦克劳林级数只在区间 $(-1,1)$ 收敛.

(c) 求证：函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数，且它的麦克劳林级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，但是只在点 $x=0$ 收敛到 $f(x)$.

评述：对于一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内定义的函数 $f(x)$，与其相关的有三个区间：(1) $f(x)$ 有任意阶导数的区间；(2) 它的麦克劳林级数收敛的区间；(3) 麦克劳林级数收敛到 $f(x)$ 的区间. 前面的习题表明：这三个区间可能互不相同.

例 2 将函数 $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在点 $x=-4$ 展开成泰勒级数.

解：幂级数的和.

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}(x+4)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}(x+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+4)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x+4)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$

第一个幂级数在区间 $(-6,-2)$ 内收敛到 $\frac{1}{x+1}$，第二个幂级数在区间 $(-7,-1)$ 内收敛到 $\frac{1}{x+2}$，于是，根据幂级数和的定理，上式在区间 $(-6,-2)$ 内成立.

习题 将下列函数展开成麦克劳林级数.

(a) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x}+\sqrt{1+2x}}$.

(b) $y=\ln(x^2-3x+2)$.

(c) $y=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

(d) $y=\sin^3 x$.

例 3 将函数 $y=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$展开成麦克劳林级数.

解:幂级数的乘积.

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}=\frac{1-x}{1-x^8}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{8n}=1-x+x^8-x^9+x^{16}-x^{17}+\cdots$$

因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{8n}$ 在区间$(-1,1)$内收敛到函数$\dfrac{1}{1-x^8}$，而$1-x$ 是一个多项式，根据幂级数乘积的定理，上式在区间$(-1,1)$内成立.

习题 将下列函数展开成麦克劳林级数.

(a)$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

(b)$y=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

例 4 将函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$展开成麦克劳林级数.

解:逐项微分与逐项积分.

逐项求导，得

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ -1<x<1.$$

因为 $f(0)=0$，逐项积分，得

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

因为右端幂级数在 $x=\pm 1$ 时收敛，和函数在该点连续，根据阿贝尔第二定理，展开式在区间$[-1,1]$上成立.

评述:在计算过程中，已知和函数仅在开区间成立. 但是，由于先进行逐项微分，后进行逐项积分，最终结果可能在一个或两个端点也成立.

习题 将下列函数展开成麦克劳林级数.

(a)$y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

(b)$y=\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}$.

例 5 将函数 $y=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 展开成麦克劳林级数.

解:逐项微分与逐项积分.

将展开式 $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$,$(-\infty,+\infty)$逐项积分，得

$$y=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty).$$

习题　将下列函数展开成麦克劳林级数.

(a) $y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

(b) $y=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

例 6*　将函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$ 展开成麦克劳林级数.

解:幂级数的商.

当 $x\neq 0$ 时,

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

因为用到幂级数的商，而商的定理不能断定收敛区间. 需要其他办法. 首先，上式右端的幂级数在区间$(-\infty,+\infty)$内收敛. 设它的和函数为 $g(x)$. 则 $g(0)=1=f(0)$. 设 $x\neq 0$，则由常数项级数的运算定理

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\sin x}{x}=f(x).$$

于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!},(-\infty,+\infty)$.

习题

(a)将函数 $y=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x},x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$ 展开成麦克劳林级数.

(b)将函数 $y=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$ 展开成麦克劳林级数.

例 7*　将函数 $f(x)=e^x\cos x$ 展开成麦克劳林级数.

解:用欧拉公式间接展开.

如果用幂级数的乘积，则计算相当复杂. 与求导相似，可以用欧拉公式.

因为 $e^x(\cos x+i\sin x)=e^{(1+i)x}$，所以对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}).$$

在等式两端取实部，得 $f(x)=e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!},(-\infty,+\infty)$.

习题　将下列函数展开成麦克劳林级数.

(a) $f(x)=e^x\sin x$.

(b) $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

例 8 将函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 在点 $x=1$ 处展开成泰勒级数.

解: 展开成泰勒级数.

改写，展开.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n .$$

此式当 $\frac{|x-1|}{2}<1$，即 $-1<x<3$ 时成立.

习题

(a)将函数 $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在点 $x=1$ 处展开成泰勒级数.

(b)将函数 $y=\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{3}$ 处展开成泰勒级数.

例 9 将函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 展开成 $\frac{x}{1+x}$ 的广义幂级数.

解: 展开成广义幂级数.

令 $u=\frac{x}{1+x}$，则 $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{u}{\sqrt{1-u}}$. 将后者展开成麦克劳林级数，得

$$\frac{u}{\sqrt{1-u}}=u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^{n+1},\ -1<u<1.$$

代回，得

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},\ x>\frac{1}{2} .$$

习题

(a)将函数 $y=\frac{1}{1-x}$ 展开成 $\frac{1}{x}$ 的广义幂级数.

(b)将函数 $y=\ln x$ 展开成 $\frac{x-1}{x+1}$ 的广义幂级数.

例 10 设奇函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,(-R,R)$，则 $a_{2n}=0,n=0,1,2\cdots$

证: 特殊类型的函数的展开式.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以对于任意取定的 $|x|<R$，有 $f(x)+f(-x)=0$. 根据常数项级数和的定理，有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}=0$.

根据幂级数展开的唯一性定理，有 $a_{2n}=0,n=0,1,\cdots$

习题

(a)设偶函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,(-R,R)$，则 $a_{2n+1}=0,n=0,1,2,\cdots$

(b)设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,(-R,R)$，而且满足函数方程 $f(x^2)=f(x)+f(-x)$，则 $a_0=0$，且当 $n=2^p(2q-1)$时，有 $a_n=\frac{1}{2^p}a_{2q-1}$.

例 11 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的和函数.

解:幂级数的和函数. 先逐项求导.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$，则 $S(0)=0$. 求导，得 $S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则 $S'(0)=0$. 再求导，得

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2},\ -1<x<1.$$

积分，得

$$S'(x)=S'(0)+\int_0^x S''(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\arctan x.$$

再积分，得

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=2\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x=2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

因为幂级数在区间端点收敛，和函数在端点连续，根据阿贝尔第二定理，此式在闭区间$[-1,1]$成立.

习题

(a)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

例 12 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{(2n)!}x^{2n}$ 的和函数.

解:幂级数的和函数.

将 $2n^2+1=n(2n-1)+n+1$ 代入，得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{(2n)!}x^{2n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n-2)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\&=-\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\&=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x.\end{aligned}$$

上式在区间$(-\infty,+\infty)$内成立.

习题

(a)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数.

(b)求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}x^n$ 的和函数.

(c)求极限 $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

例 13 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，其中 $a_0=4$，$a_1=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$.

解:幂级数的和函数.

由 $a_0=4, a_1=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，迭代得 $a_{2n-1}=\dfrac{1}{(2n-1)!}$，$a_{2n}=\dfrac{4}{(2n)!}$.
因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = e^x+3\cosh x .\end{aligned}$$

习题 求下列幂级数的收敛半径与和函数.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中 $a_0=1, a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$.

(c) 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 的和函数.

第六节 傅立叶级数

例 1 设函数 $f(x)$ 的周期等于 2π，在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, -\pi\leqslant x<0\\ 0, 0\leqslant x<\pi\end{cases}$，$(a>0)$，计算它的傅立叶级数.

解:展开周期等于 2π 的函数.

函数满足狄利克雷条件. 用傅立叶系数公式.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi a}(1-e^{-\pi a}).$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{ax}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a}{\pi(a^2+n^2)}[1-(-1)^ne^{-\pi a}].$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{ax}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-n}{\pi(a^2+n^2)}[1-(-1)^ne^{-\pi a}].$$

根据狄利克雷定理，有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi a}(1-e^{-\pi a})+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^ne^{-\pi a}}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx), x\neq k\pi .$$

当 $x=2k\pi$ 时，傅立叶级数收敛到$\dfrac{1}{2}$；当 $x=(2k-1)\pi$ 时，傅立叶级数收敛到$\dfrac{1}{2}e^{-\pi a}$.

习题

(a)设函数 $f(x)$ 的周期等于 2π，在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0 \\ 0, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$，求它的傅立叶级数.

(b)设函数 $f(x)$ 的周期等于 2π，在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\begin{cases} x+2\pi, & -\pi\leqslant x<0 \\ \pi, & x=0 \\ x, & 0<x<\pi \end{cases}$，求它的傅立叶级数.

例 2 求函数 $y=\operatorname{sgn}x$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的傅立叶级数.

解: 奇函数.

这不是周期函数，必须先行周期延拓. 为避免矛盾，除去点 $x=\pi$. 考虑以 2π 为周期的函数 $f(x)$，在区间 $[-\pi,\pi)$ 上有 $f(x)=\operatorname{sgn}x$.

函数 $f(x)$ 满足狄利克雷条件. 因为函数是奇函数(除去点 $x=-\pi$)，所以 $a_n=0$. 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}.$$

根据狄利克雷定理，有 $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, x\neq(2k-1)\pi$.

从而有 $\operatorname{sgn}x=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}(-\pi<x<\pi)$. 当 $x=\pm\pi$，级数收敛于零.

习题

(a)求函数 $y=\pi^2-x^2$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的傅立叶级数.

(b) 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}, x\in[-\pi,\pi]$.

例 3 将函数 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant\pi$ 在区间 $[0,\pi)$ 上展开成正弦级数.

解: 奇延拓.

首先将函数 y 奇延拓到区间 $[-\pi,\pi)$，得 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<\pi\\ -x^2, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$，然后将函数 $f(x)$ 周期延拓，再作傅立叶展开.

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}-[1-(-1)^n]\frac{4}{\pi n^2}.$$

根据狄利克雷定理，有

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}-[1-(-1)^n]\frac{4}{\pi n^3}\right)\sin nx,\ 0\leqslant x<\pi.$$

当 $x=\pi$ 时，傅立叶级数收敛到 0.

习题

(a)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有连续的二阶导数，计算定积分

$I=\int_0^{\pi}[f''(x)+n^2f(x)]\sin nx\mathrm{d}x$. 并用此结果将函数 $f(x)=e^{\lambda x}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ 在区间 $[0,\pi)$ 展开成正弦级数.

(b)求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$, $0<x<\pi$.

(c)求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$, $0\leqslant x<\pi$

例 4 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 满足狄利克雷条件以及函数方程 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则其傅立叶系数有 $a_{2n}=0=b_{2n}$.

证: 特殊类型的函数的展开式.

用傅立叶系数公式.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x-\pi)\cos n(x-\pi)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\cos nx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是 $a_{2n}=0$. 同理可证 $b_{2n}=0$.

习题

(a)设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 满足狄利克雷条件以及函数方程 $f(x-\pi)=f(x)$, 则其傅立叶系数有 $a_{2n-1}=0=b_{2n-1}$.

(b)设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上满足狄利克雷条件. 问题: 如何将它延拓到区间 $[-\pi,\pi]$, 使得其傅立叶展开式形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$?

(c)将函数 $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 展开成习题(b)中那种形式的傅立叶级数.

例 5 计算周期函数 $f(x)=x-[x]$ 的傅立叶级数.

解: 展开周期等于 $2l$ 的函数.

这个函数满足狄利克雷条件. 它的周期等于 1. 在区间 $[0,1]$ 上. $f(x)=x$. 计算傅立叶系数时, 在区间 $[0,1]$ 上积分.

$$a_0=2\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1x\mathrm{d}x=1.$$

$$a_n=2\int_0^1f(x)\cos2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1x\cos2n\pi x\mathrm{d}x=0.$$

$$b_n=2\int_0^1f(x)\sin2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1x\sin2n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}.$$

根据狄利克雷定理, 有

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin2n\pi x}{n},\ x\text{ 不是整数}.$$

当 x 是整数时, 傅立叶级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 定义为 x 到与它最近的整数的距离，求 $f(x)$ 的傅立叶级数.

(b) 求函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 的傅立叶级数.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，则它的以 2π 为周期的傅立叶级数在 $x=\pi$ 时收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$.

证:狄利克雷定理.

将 $f(x)$ 开拓为周期 2π 的函数后，在点 $x=\pi$ 处的左极限等于 $1+\pi^2$，右极限等于 -1. 根据狄利克雷定理，其傅立叶级数在该点收敛到 $\frac{\pi^2}{2}$.

习题

(a) 设函数 $f(x)=x^2,\ 0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots$，求 $S(-1)$.

(b) 设函数 $f(x)$ 的周期等于 2，在区间 $[-1,1)$ 上有 $f(x)=\begin{cases}2, & -1\leqslant x<0\\ x^3, & 0\leqslant x<1\end{cases}$，求它的傅立叶级数的和函数.

例 7* 设函数 $f(x)\geqslant 0$ 以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，则对于任意的自然数 n，有 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\leqslant a_0$.

证:特殊类型的函数的展开式.

因为 $f(x)\geqslant 0$，根据定积分的保号性定理，$a_0\geqslant 0$. 用施瓦兹不等式，得

$$\begin{aligned}
a_n^2+b_n^2 &= \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)^2\\
&\leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos^2 nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^2 nx\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x = a_0^2.
\end{aligned}$$

习题

(a)设奇函数 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上非负，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，则 $|b_n|\leqslant nb_1$.

(b)设函数 $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上有界且单调增加，其傅立叶系数为 a_n、b_n，则 $b_n\geqslant 0$.

例 8* 设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件，其傅立叶系数为 a_n、b_n. 又设 $f(x)$的导函数满足狄利克雷条件，求 $f'(x)$的傅立叶系数.

解:傅立叶级数运算定理的讨论.

用傅立叶系数公式和定积分的分部积分公式. $f'(x)$的傅立叶系数记为 A_n、B_n，则

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0.$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = nb_n.$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\,|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -na_n.$$

即，如果 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx]$，则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[nb_n\cos nx - na_n\sin nx].$$

评述:这是傅立叶级数的逐项微分定理.

习题

(a)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件，其傅立叶系数为 a_n、b_n. 又设 $f(x)$ 的 m 阶导函数满足狄利克雷条件，求 $f^{(m)}(x)$的傅立叶系数.

(b) 设连续函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，其中 $a_0=0$. 求函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的傅立叶系数A_n、B_n，$n\geqslant 1$.

评述:由此将得到傅立叶级数的逐项积分定理.

例 9*　设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，计算函数 $g(x)=f(x+h)$的傅立叶系数.

解:傅立叶级数运算定理的讨论.

用傅立叶系数公式和定积分换元公式. 函数 $g(x)=f(x+h)$的傅立叶系数记为 A_n、B_n,则

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{h-\pi}^{h+\pi} f(x)\mathrm{d}x = a_0.$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{h-\pi}^{h+\pi} f(x)\cos n(x-h)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{h-\pi}^{h+\pi} f(x)[\cos nx\cos nh + \sin nx\sin nh]\mathrm{d}x = a_n\cos nh + b_n\sin nh. \end{aligned}$$

同理可证 $B_n = b_n\cos nh - a_n\sin nh$.

习题

(a)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，计算下列函数的傅立叶系数.

(1)$g(x)=f(-x)$;　(2)$h(x)=-f(-x)$.

(b)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，求函数 $F(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ 的傅立叶系数，其中 h 是常数.

例 10*　设函数 $f(x)$与 $g(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件.设其傅立叶系数分别为 a_n、b_n 和c_n、d_n，计算函数 $F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t+x)\mathrm{d}t$ 的傅立叶系数.

解:傅立叶级数运算定理的讨论.

用傅立叶系数公式和二重积分的改变积分顺序. 函数 $F(x)$的傅立叶系数记为 A_n、B_n，则

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t+x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)c_0\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0c_0.$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t+x)\mathrm{d}t\right)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\cos nx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(c_n\cos nt + d_n\sin nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_nc_n + b_nd_n).$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t+x)\mathrm{d}t\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\sin nx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(d_n\cos nt - c_n\sin nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_nd_n - b_nc_n).$$

习题

(a)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，计算函数 $F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t+x)\mathrm{d}t$ 的傅立叶系数.

(b)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，求证：$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

评述：这个公式称为 Parseval 等式.

(c)设函数 $f(x)$以 2π 为周期，满足狄利克雷条件. 设其傅立叶系数为 a_n、b_n，求定积分 $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\mathrm{d}x$ 和 $I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)\mathrm{d}x$.

第七节　函数项级数的应用

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解：用展开式计算高阶导数.

在本章第五节例 6 中有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

根据幂级数展开的唯一性定理，有 $f^{(2n-1)}(0)=0$，$f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

习题

(a)设函数 $y=x^{100}e^{x^2}$，计算 $y^{(200)}(0)$.

(b)设函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $y^{(n)}(0)$.

(c)设函数 $y = e^x \sin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

例 2 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$，记 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，求证：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛，并求其和.

解:用展开式计算高阶导数.

设 $p > 1 > q$ 是方程 $y^2 - y - 1 = 0$ 的两个根，则 $1 - x - x^2 = (1 - px)(1 - qx)$. 于是，

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{p - q}\frac{p}{1 - px} - \frac{1}{p - q}\frac{q}{1 - qx} = \frac{1}{p - q}\sum_{n=0}^{\infty}(p^{n+1} - q^{n+1})x^n.$$

根据幂级数展开的唯一性定理，有 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$. 因为 $p > 1 > q$ 是方程 $y^2 - y - 1 = 0$ 的根，所以 $p^2 = p + 1, q^2 = q + 1$. 于是，有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. 因此，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+2} - a_k}{a_{k+2} a_k} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$，根据级数收敛定义，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{p + q} = 2.$$

习题

(a)设函数 $f(x)$ 可以展开成麦克劳林级数，$g(x) = f(x^2)$，则 $g^{(2n-1)}(0) = 0$，$g^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!} f^{(n)}(0)$.

例 3 计算常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n - 1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 的和.

解:用幂级数计算常数项级数的和. 收敛区间的内点.

令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n - 1} x^{2n-1}$，则幂级数在区间$[-1,1]$收敛，且 $f(0) = 0$.

逐项求导，得 $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} = \dfrac{-1}{1 + x^2}, (-1,1)$. 因为 $f(0) = 0$，逐项积分，得 $f(x) = -\arctan x$，即有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n - 1} x^{2n} = -x\arctan x$，$[-1,1]$.

取 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n - 1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

习题 求下列级数的和.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n - 1}{2^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2 - 1)2^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(2n + 1)!}$.

例 4　计算无穷乘积$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdots$

解:有关问题.

记 $A=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdots$ 取对数，得 $\ln A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\ln 3$. 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,逐项积分，得$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},(-1,1)$. 求导，得 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

取 $x=\frac{1}{3}$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{9}{4}$. 于是，$\ln A=\frac{3}{4}\ln 3$，$A=3^{3/4}$.

习题

(a) 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$，求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

(b) 求证:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}}{(2n+1)!}=1$.

例 5　计算级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的和.

解:用幂级数计算常数项级数的和. 收敛区间的端点.

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，则幂级数的收敛区间为$(-1,1]$. 逐项求导，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=\frac{-1}{1+x},(-1,1).$$

因为 $f(0)=0$，逐项积分，得 $f(x)=-\ln(1+x)$. 根据阿贝尔第二定理，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=-\ln(1+x),\ (-1,1].$$

取 $x=1$ 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$.

习题　求下列级数的和.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$.

例 6　求$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$的值.

解:用幂级数求极限.

根据正项级数的比值法，极限式的分子和分母都收敛. 记它们的和分别为 P 和 Q，则

$$\pi P-\pi^3 Q=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots=\sin\pi=0.$$

于是极限等于$\frac{P}{Q}=\pi^2$.

习题

(a) 求$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{4!2^4}+\frac{\pi^8}{8!2^8}+\frac{\pi^{12}}{12!2^{12}}+\cdots}{\frac{1}{2!2^2}+\frac{\pi^4}{6!2^6}+\frac{\pi^8}{10!2^{10}}+\frac{\pi^{12}}{14!2^{14}}+\cdots}$的值.

例 7　计算级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$的和.

解:用傅立叶级数计算常数项级数的和.

将函数$f(x)=\pi^2-x^2$在区间$[-\pi,\pi)$展开成傅立叶级数，得

$$f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

取$x=0$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

习题

(a) 求级数$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$及$T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

(b) 将函数$f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$展开成周期等于$2\pi$的傅立叶级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n^2}$的和.

例 8*　求证：$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}$.

证:用幂级数表示定积分或广义积分.

将展开式$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $(-\infty,+\infty)$逐项积分，得

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ (-\infty,+\infty).$$

取$x=1$即得.

习题

(a) 求证:$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n}$.

(b) 求证:$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(nq+p)}$，其中$p$和$q$是自然数.

(c) 用级数表示广义积分$\int_0^1\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx$.

例 9*　计算广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1}$.

解:用函数项级数计算定积分或广义积分.

首先可证广义积分收敛.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}\Big)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}xe^{-(n+1)x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

习题 计算下列广义积分.

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}$.

答案与提示

第一节 级数的定义和性质

1.(a) 求和化简. 2. (b) $\frac{1}{4}$. (c) 用第三章第七节例 22 习题(b). 1.

2.(a) $\dfrac{n^3+6n^2+11n+5}{(n+3)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+3)!}$. (b) 一般项的分子加 1，再减 1.

3.(a) $\frac{19}{4}$. (b) $\dfrac{ab+ac-c}{(a-1)^2}$.

4.(a) 证明 $S_n=\arctan\dfrac{n}{n+2}$. (b) 证明 $S_n=\arctan(n+1)^2-\arctan 1$.

5.(a) $\ln 3$. (b) $\frac{3}{2}\ln 2$.

6.(a) 证明 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{S_{n-1}}+2$.

7.(a) 用本例. $\frac{2}{9}$. (b) 条件即前奇数项和与前偶数项和数列趋向于相同极限.

8.(a) 仿本例证明. (b) 用本例.

9.(a) 仿本例证明. (b) 用习题(a) 两次.

10.(a) 用常数项级数性质 1. (b) 用常数项级数性质 3 与性质 2.

11.(a) 仿本例证明.

12.(a) 仿本例证明. (b) 证明 $u_n>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

第二节 正项级数审敛法

1.(a) r_n 单调减少趋于 0，又 $\dfrac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}}<\dfrac{2(r_{n-1}-r_n)}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}=2(\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n})$. (b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ 单调增加有上界 M，又 $\dfrac{S_1-S_0}{S_1}+\dfrac{S_2-S_1}{S_2}+\cdots+\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n}\leqslant\dfrac{S_n}{u_1}\leqslant\dfrac{M}{u_1}$.

2.(a) $u_n>1$，又 $\dfrac{u_1-u_2}{u_2}+\cdots+\dfrac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}\leqslant u_1-u_{n+1}\leqslant u_1$.

3.(a) 仿本例证明 $2r_{n+p} \leqslant r_n$，从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k}{r_{k-1}} \geqslant \frac{1}{2}$. (b) 仿本例证明 $u_{n+p} \geqslant 2u_n$，从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{u_k}{u_{k+1}}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

4.(a) 用充分必要条件. (b) 单调数列的有极限的子列.

5.(a) 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，由 $v_{n+1} < v_n + \frac{u_n}{v_1}$，得 $S_n > v_{n+1} - v_1$. 由 $v_{n+1} > v_{n-1} + \frac{u_n}{v_n}$，得 $S_n < u_1 - v_2 v_1 - v_{n+1} v_n$. (b) 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，$T_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k u_{2^k}$，证明对于 n，存在 m，使 $T_n \leqslant 2S_m$. 对于 m，存在 n，使 $S_m \leqslant u_1 + T_n$.

6.(a) $u_n \leqslant \frac{3}{2^n}$. (b) $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^2 \mathrm{d}x$.

(c) $\frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{(n-1)(n-1)! + n!}{(n+2)!}$.

7.(a) $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. (b) 当 $u_n \geqslant 1$ 时，$\frac{u_n}{1 + u_n} \geqslant \frac{1}{2}$. 当 $u_n < 1$ 时，$\frac{u_n}{1 + u_n} \geqslant \frac{u_n}{2}$. (c) $u_n \leqslant \frac{M}{n^2}$.

8.(a) $n > N$ 时 $0 < u_n < \frac{1}{2}$. (b) $n > N$ 时 $0 < v_n < 1$.

9.(a) $x_n > \frac{n\pi}{2}$. (b) $\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$. (c) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

10.(a) 证明 $u_{n+1} \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_{n+1}$.

11.(a) 与 $\frac{1}{n^{3/2}}$ 比较. (b) $a > 1$.

12.(a) $a > \frac{1}{\ln 2}$. (b) n 充分大时 $\ln n > 3$. 收敛.

13.(a) $a = b$ 时与 $\frac{1}{n^2}$ 比较. $a \neq b$ 时与 $\frac{1}{n}$ 比较. (b) $x \neq 0$ 时与 $\frac{1}{n^{3/2}}$ 比较.

14.(a) 与 $\frac{1}{n}$ 比较. (b) 与 $\frac{1}{n^2}$ 比较.

15.(a) 与 $\frac{1}{n^2}$ 比较. (b) 与 $\frac{1}{n}$ 比较. (c) 与 $\frac{1}{n^{4/3}}$ 比较.

16.(a) 与 $\frac{1}{n^2}$ 比较. (b) 与 $\frac{1}{n^{3/2}}$ 比较. (c) 与 $\frac{1}{n}$ 比较.

17.(a) 收敛. (b) 收敛. (c) 收敛.

18.(a) $a < 1$ 时收敛. $a > 1$ 时发散. 若 $a = 1$，则 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散. (b) $p > 1$ 时收敛. $p \leqslant 1$ 时发散.

19.(a) 收敛. (b) 收敛.

20.(a) 用本例. 收敛. (b) 发散. (c) 用本例. $p + a > 1$ 时收敛. $p + a < 1$ 时发散. $p + a = 1$ 时用例 16 的方法可证发散.

21.(a) 用本例. 收敛. (b) 用本例. $x > 1$ 时收敛. $x < 1$ 时发散. $x = 1$ 时用比较法. (c)

用本例. $x > 1$ 时发散. $x < 1$ 时收敛. $x = 1$ 时是等比级数.

22. (a) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \dfrac{1}{p} - 1$. (b) $\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n} = \dfrac{n\ln\dfrac{1}{\sqrt[n]{u_n}}}{\ln n}$. (c) 用 Stolz 定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$.

23. (a) $p > 1$ 时收敛, $p \leqslant 1$ 时发散. (b) $p > 1$ 时收敛, $p \leqslant 1$ 时发散.

24. (a) 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$, 证明 $T_n = S_n - nu_{n+1}$. 用本例. (b) $u_{n+1} < \sqrt{u_n u_{n+1}}$. (c) $u_n \leqslant \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

第三节　一般项级数的审敛法

1. (a) 收敛. (b) 收敛.

2. (a) 收敛. (b) 收敛.

3. (a) 用本例. (b) 用第一章第二节例 9 习题(a). (c) 设 $u_n = \dfrac{1}{n}$. 用习题(b).

4. (a) 用本例. 收敛. (b) 用本例. 收敛.

5. (a) 仿本例证明.

6. (a) 用本例方法, 得到一个收敛的交错级数与一个收敛的正项级数. (b) $x = 1$ 时收敛. $x \neq 1$ 时, 用常数项级数性质 4 的逆否命题, 证明加括号后的级数发散.

7. (a) 级数不一定收敛. 反例: $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

8. (a) 收敛. (b) 收敛. (c) 收敛.

9. (a) 用比较审敛法的极限形式. (b) 用比较审敛法. (c) 用比较审敛法.

10. (a) 仿本例证明充分性. 用级数收敛必要条件证 $f(0) = 0$, 用反证法证明 $f'(0) = 0$. (b) 设 $F(x) = f(x) - 1$, 用习题(a).

11. (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2 > 1$. (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{e}{2} > 1$.

12. (a) $p \leqslant 0$ 时发散. 若 $p > 0$, 用数学归纳法证明 $\dfrac{1}{2n^p} < \dfrac{n}{n^{p+1} + 1} < \dfrac{1}{n^p}$. $p > 1$ 时绝对收敛; $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛. (b) $p \leqslant 0$ 时发散. 若 $p > 0$, 用数学归纳法证明 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. $p > 2$ 时绝对收敛; $0 < p \leqslant 2$ 时条件收敛. (c) a 是整数时收敛. 用级数收敛必要条件证明发散.

13. (a) 用本例. 收敛. (b) 用本例. 收敛.

14. (a) 用本例与反证法.

15. (a) 用反证法.

16. (a) 对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 用本例. $\dfrac{1}{2}$. (b) 证明 $\dfrac{u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1}}{u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}} - 1 <$

$\frac{u_1}{u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}}$.

第四节　幂级数

1. (a) $(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$. (b) $(1, +\infty)$. (c) 改写. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
2. (a) $x \neq -1, -2, -3, \cdots$
3. (a) $(-1,1)$. (b) $(-1,1)$.
4. (a) $(-a,a)$. (b) $[-1,1]$.
5. (a) $(-1,1)$. (b) $(-e,e)$. (c) $(-7,7)$.
6. (a) $(-1,1)$. (b) $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$. (c) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
7. (a) $|b|$. (b) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
8. (a) 仿本例证明. (b) $1 < a \leqslant 3$.
9. (a) 令 $u = \frac{1}{x}$, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. (b) 令 $u = x(1-x)$, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.
10. (a) 令 $u = 2\sin x$, $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [n\pi - \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{\pi}{6}]$, n 是整数.
11. (a) 设 $|a_n| \leqslant M$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mx^n$ 的收敛半径等于 1. 用本例. (b) 用本例. (c) 对充分大的 n，有 $m|a_n| \leqslant |b_n| \leqslant M|a_n|$. 用本例.
12. (a) 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 比较，用本节例 11，收敛半径不小于 1. $(-1,1)$ (b) 同习题(a).
13. (a) $a \geqslant b$ 时 $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$. $a < b$ 时 $[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}]$. (b) 用本节例 11 与本例.
14. (a) 多项式的收敛半径等于 $+\infty$. R.
15. (a) 令 $u = x^3$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ 的收敛区间为 $[-2,2)$. 再仿本节例 14 习题(a) 证明. (b) 令 $u = \frac{e^x}{2}$. $(-\infty, \ln 2R)$. (c) 令 $u = x - 1$. 用逐项求导，再仿本节例 14 习题(a) 证明.
   $(-R+1, R+1)$.
16. (a) $(1-x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a+nd)x^n = a + (d-a)x$.
17. (a) 用常数项级数的性质 3，多项式乘以幂级数与逐项积分.
18. (a) 逐项求导，乘以 x，再逐项求导. (b) 乘以 x，再逐项积分.
19. (a) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-K,K)$ 内收敛，证明 $0 < |x| < K$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} > 0$.

第五节　泰勒级数

1. (a) 仿本例证明. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, $(-R,R)$. (b) 用数学归纳法证明. 函数有任意阶导数，且 $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}[1-(-1)^{n-1}]$，于是麦克劳林级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，收敛于 $f(x)$

的区间$(-1,1)$. (c) 用数学归纳法证明. 函数有任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$,于是麦克劳林级数为$\sum_{n=0}^{\infty}0x^n$，仅在 $x=0$ 收敛于 $f(x)$.

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}-3}{6}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!}\left[\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{2}\right]x^n,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

(b) $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2^n})x^n,[-1,1)$. (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n},(-1,1)$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3}{4\cdot(2n+1)!}(1-3^{2n})x^{2n+1},-\infty<x<+\infty$.

3. (a) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$, $(-1,1)$.

4. (a) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},[-1,1]$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)4^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)4^n},[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

5. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}x^n,(-\infty,+\infty)$. (b) 用本节例 6. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $(-\infty,+\infty)$.

6. (a) 仿本例证明 . $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1},(-1,1)$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},[-1,1)$.

7. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!},(-\infty,+\infty)$. (b) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos na}{n}x^n,(-1,1)$.

8. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n,(-1,3)$.

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{3})^{2n}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{3})^{2n+1},(-\infty,+\infty)$.

9. (a) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n},|x|>1$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1},(-1,1]$

10. (a) 对于偶函数 $f^{(2n-1)}(0)=0$. 用唯一性定理. (b) 用唯一性定理，有 $a_0=2a_0$, $a_n=2a_{2n},n=1,2,\cdots$

11. (a) $S(x)=\begin{cases}1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x},0<|x|\leqslant 1\\ 0,x=0\end{cases}$.

12. (a) $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},(-1,1)$. (b) $S(x)=(1+x+x^2)e^x,(-\infty,+\infty)$.

(c) 求和函数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$. 2.

13. (a) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，得 $S(x)-1-x=x(S(x)-1)+x^2S(x)$,于是 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$，求极限，得$|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x|<1$. (c) $x=0$ 时，级数等于零. $x\neq 0$ 时，令 $u=\frac{1}{1+x^2}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{1-u}{u}\sum_{n=1}^{\infty}u^n=1$.

第六节　傅立叶级数

1. (a) $f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\{[1-(-1)^n]\cos nx+(-1)^{n+1}n\pi\sin nx\}, x\neq(2k-1)\pi$. 当 $x=(2k-1)\pi$ 时，级数收敛于 $-\frac{\pi}{2}$. (b) 展开 $g(x)=f(x)-\pi$. $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n})\sin nx$, $-\infty<x<+\infty$.

2. (a) $y=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}, -\pi\leqslant x\leqslant\pi$. (b) 用习题(a) 与唯一性定理.

3. (a) $I=n[f(0)+(-1)^{n+1}f(\pi)]$. $e^{\lambda x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n[1-(-1)^n e^{\lambda\pi}]}{\pi(\lambda^2+n^2)}\right)\sin nx, 0<x<\pi$. 当 $x=0$ 与 $x=\pi$ 时，级数收敛到 0. (b) 将右边奇延拓，再展开. 用唯一性定理.

(c) 将右边偶延拓，再展开. 用唯一性定理.

4. (a) 二分区间，反射变换左边子区间. (b) $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ 时 $g(x)=-f(\pi+x)$. $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时 $g(x)=f(-x)$. $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $g(x)=f(x)$. $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时 $g(x)=-f(\pi-x)$. (c) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{(2n-1)^2}+\frac{8\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)^3}\right]\cos(2n-1)x$.

5. (a) $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2}$. (b) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$，其中 x 不是整数. 当 x 是整数时，级数收敛到 0.

6. (a) 奇延拓 $S(-1)=0$. (b) $S(x)=f(x)$，x 不是整数. $S(2n)=1, S(2n-1)=\frac{3}{2}$.

7. (a) 用数学归纳法证明：当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，有 $|\sin nx|\leqslant n\sin x$. (b) 换元 $u=nx$. n 等分区间. 仿第三章第七节例 19 习题(b)，对每个子区间证明.

8. (a) $A_0=0$.　$A_n=\begin{cases}(-1)^k n^{2k}a_n & m=2k\\(-1)^{k+1}n^{2k-1}b_n & m=2k-1\end{cases}$.

$B_n=\begin{cases}(-1)^k n^{2k}b_n & m=2k\\(-1)^k n^{2k-1}a_n & m=2k-1\end{cases}$. (b) $A_n=-\frac{b_n}{n}, B_n=\frac{a_n}{n}$.

9. (a)(1) $A_n=a_n, B_n=-b_n$. (2) $A_n=-a_n, B_n=b_n$. (b) $A_0=2ha_0, A_n=\frac{2a_n\sin nh}{n}$, $B_n=\frac{2b_n\sin nh}{n}$.

10. (a) 用本例. $A_0=\frac{1}{2}a_0^2, A_n=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2), B_n=0$. (b) 用傅立叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 代替左边积分中一个 $f(x)$. (c) 仿习题(b) 证明. $I_1=$

$\frac{b_n}{n}, I_2 = \frac{\pi a_0}{2} - \frac{b_n}{n}$.

第七节　函数项极数的应用

1.(a) $\frac{200!}{50!}$. (b) $y^{(2n)}(0) = 0, y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n-1)!!$. (c) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

2.(a) 代入得 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n}$.

3.(a) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 3. (b) 分成两项 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$. $\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2$. (c) 分成两项 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}$. $\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1$.

4.(a) $\sum_{n=0}^{\infty}I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}dx = -\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$. (b) 用 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

5.(a) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$. $-\frac{\pi}{4}$. (b) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}x^{3n-2}$. $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. (c) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$. $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

6.(a) 仿本例证明. π^2.

7.(a) 令 $f(x) = \pi^2 - x^2$, $S = \frac{\pi^2}{6}, T = \frac{\pi^2}{8}$. (b) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$.

8. (a) 用 $\frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$. (b) 用 $x^{p-1}\ln(1-x^q) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{nq+p-1}}{n}$. (c) 用 $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n}$.

9.(a) 将分母展开. $-\frac{\pi^2}{6}$. (b) 换元 $t = \frac{1}{x}$, 将分母展开. $\frac{1}{6}$.

第八章　常微分方程

第一节　一阶微分方程

例 1　解微分方程 $xy'+y'=2\sqrt{xy}$.

解：可以分离变量的方程.

分离变量，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x$. 将方程两端同时积分，得

$2\sqrt{y}=4(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C$.

验算：对 x 求导，得$\dfrac{y'}{\sqrt{y}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\right)$. 即$(1+x)y'=2\sqrt{xy}$.

习题　解下列微分方程.

(a) $y'+e^{x}=e^{x-y}$.

(b) $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$.

例 2　解微分方程 $y'=\dfrac{y^3}{xy^2-x^3}$.

解：齐次方程.

以 x 为自变量，$u=\dfrac{y}{x}$ 为函数，得 $xu'+u=\dfrac{u^3}{u^2-1}$. 分离变量，得$\dfrac{u^2-1}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分，得$\dfrac{1}{2}u^2-\ln u=\ln x+C$. 代入，得 $y^2=2x^2(\ln y+C)$.

评述：对于齐次方程，也可以 y 为自变量，$u=\dfrac{x}{y}$为函数. 有时，用这个方法可以得到比较简单的可分离变量的方程.

习题

(a)解微分方程$(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

(b)解微分方程 $y\mathrm{d}x+(2\sqrt{xy}-x)\mathrm{d}y=0$.

(c)已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$是微分方程$y'=\dfrac{y}{x}+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$的特解，求 $g(x)$及方程的通解.

例 3　解微分方程 $y'=(x+y+1)^2$.

解：变量替换，变成可以分离变量的方程.

令 $u=x+y+1$，得 $u'-1=u^2$. 解得 $\arctan u=x+C$. 代入，得
$\arctan(x+y+1)=x+C$.

评述：变量替换是解微分方程的重要方法之一. 一旦发现某种方程的解法，首先考虑的是：通过变量替换哪些方程可以变成这种方程，从而求解.

习题　解下列微分方程.

(a) $yy' + x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.

(b) $y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

例 4 解微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y + (y - \ln x)\mathrm{d}x = 0$.

解:一阶线性微分方程.用公式.

$$y = e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left(C + \int\frac{1}{x}e^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\ln x}\left(C + \int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{C}{\ln x} + \frac{\ln x}{2}.$$

习题 解下列微分方程.

(a) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}\ln x$.

(b) $y' + f'(x)y = f(x)f'(x)$,其中函数 $f(x)$ 有连续的导数.

例 5 解微分方程 $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

解:将变量 y 看作自变量时,这是一阶线性微分方程.

将方程 $x' = 2x - y^2$ 代入一阶线性微分方程解的公式,

$$x = e^{\int 2\mathrm{d}y}\left[C + \int(-y^2)e^{-\int 2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right] = Ce^{2y} + \frac{1}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right).$$

习题

(a) 解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + y^4}$.

(b) 设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$,其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, x<1 \\ 0, x>1 \end{cases}$,求在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的函数 $y = y(x)$,使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足方程,且满足条件 $y(0) = 0$.

(c) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内有 $f(x)>0$,且满足微分方程 $xf'(x) = f(x) + \frac{3}{2}ax^2$. 设由曲线 $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ 和 $x = 1$ 所围成的图形 S 的面积等于 2,求 $f(x)$. 并讨论常数 a 的取值范围.

例 6 设函数 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个特解,求此方程的满足条件 $y(\ln 2) = 0$ 的特解.

解:将 $y = e^x$ 代入方程,得 $p(x) = x(e^{-x} - 1)$. 再代入公式,得通解 $y(x) = e^x(Ce^{e^{-x}} + 1)$. 将 $y(\ln 2) = 0$ 代入,得 $C = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. 即 $y(x) = e^x(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}e^{e^{-x}})$.

习题

(a) 设函数 $q(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 连续且有界,常数 $k>0$,则方程 $y' + ky = q(x)$ 有一个特解 $y = \int_0^{+\infty} q(x - t)e^{-kt}\mathrm{d}t$.

例 7 设函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个线性无关的解,则方程的任一解 $y(x)$ 满足 $\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = c$,其中 c 是常数.

证:一阶线性方程解的结构.

一阶线性微分方程的通解为 $y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$. 于是,

$y(x)-y_1(x)=e^{-\int p(t)\mathrm{d}t}(C-C_1)$.从而$\dfrac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=\dfrac{C-C_1}{C_2-C_1}$.

习题

(a)设函数 $y_1(x),y_2(x)$是一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$的两个不同的解,且它们的线性组合 $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$也是这个方程的解,求 α 与β 之间的关系.

(b)设函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,且 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$,则 $u(x)=1+Ce^{-\int\frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x}$.

例 8 设函数 $p(x),q(x)$连续,则方程 $y'+p(x)y=q(x)$的满足初值条件 $y|_{x=a}=y(a)$ 的解为 $y=y(a)e^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}+\int_a^x q(t)e^{-\int_t^x p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t$.

证:一阶线性方程.

用常数变易法.令 $y=u(x)e^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}$,代入,得 $u(x)=q(x)e^{\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}$.积分,得 $u(x)=u(a)+\int_a^x q(t)e^{\int_a^t p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t$.因为 $y(a)=u(a)$,所以

$$y=e^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}\left[y(a)+\int_a^x q(t)e^{\int_a^t p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right]=y(a)e^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}+\int_a^x q(t)e^{-\int_t^x p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

评述:这是用定积分表示一阶线性微分方程解的公式.

习题

(a)设 $p(x)\geqslant 0$ 在区间$[a,+\infty)$连续,微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的任一解 $y(x)$满足,$y(a)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$,则广义积分$\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 9 设函数 $q(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=b$.

(1)如果 $a>0$,则方程 $y'+ay=q(x)$的任一解 $y(x)$有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$;

(2)如果 $a<0$,则方程 $y'+ay=q(x)$恰有一个解 $y(x)$具有这个性质.

证:一阶线性方程解的性质.

方程的通解为 $y(x)=e^{-ax}\left(y(0)+\int_0^x q(t)e^{at}\mathrm{d}t\right)$.

(1)如果 $a>0$,用洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(0)+\int_0^x q(t)e^{at}\mathrm{d}t}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{q(x)e^{ax}}{ae^{ax}}=\frac{b}{a}.$$

(2)如果 $a<0$,为使极限$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$存在,必须

$$y(0)=-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x q(t)e^{at}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}q(x)e^{ax}\mathrm{d}x.$$

因为函数 $q(x)$有界,所以广义积分$\int_0^{+\infty}q(x)e^{ax}\mathrm{d}x$ 收敛.对满足初值条 $y(0)=-\int_0^{+\infty}q(x)e^{ax}\mathrm{d}x$ 的特解用洛必达法则即可.

评述:为了给出一个函数,最直接的方法当然是写出解析式.然而,除此之外还有许多间接的方法.例如:函数方程定义的函数,含有参变量的函数的极限,积分上限的函数,函数项级数

的和函数，最后还有微分方程定义的函数.每一种情况都自然地引出研究所定义函数的性质的问题.

按照求解过程，这类问题大致上又可以分成两类.第一类是先求出函数的解析表达式，再研究性质.这是我们经常见到的所谓综合题.只要对于组成综合题的各个元件有清楚的了解，解这种综合题并不困难.如果你自己曾经编过几个这样的题目，那么对于你，它就不再有任何秘密可言.

值得注意的是第二类：不(不必或不能)求出函数的解析式，直接研究性质.这类问题没有统一的解题模式，比较难于掌握.如果将本书中所有的这类问题找出来，研究一番，或许能取得一些经验.

习题

(a)设函数 $q(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}q(x)=b$.

(1)如果 $a<0$，则方程 $xy'+ay=q(x)$的所有的解在 $x\to 0$ 时趋向于同一极限；

(2)如果 $a>0$，则方程 $xy'+ay=q(x)$只有一个解在 $x\to 0$ 时保持有界.

(b)设函数 $p(x)\geqslant c>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=0$，则方程 $y'+p(x)y=q(x)$的任一解 $y(x)$有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

(c)设函数 $f(x)$连续，且$|f(x)|\leqslant k$，又设常数 $a>0$，则微分方程 $y'+ay=f(x)$，$y(0)=0$ 的解 $y(x)$有$|y(x)|\leqslant\dfrac{k}{a}(1-e^{-ax})$，$x\geqslant 0$.

例 10 解微分方程 $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

解：贝努利方程.

令 $u=\sqrt{y}$，得 $2xu'-4u=x^2$.用公式，得 $u=x^2\left(C+\dfrac{\ln x}{2}\right)$.

代入，得$\sqrt{y}=x^2\left(C+\dfrac{\ln x}{2}\right)$.

习题 解下列微分方程.

(a)$x^2y'+xy=y^2$.

(b)$y'g(x)=yg'(x)-y^2$，其中 $g(x)$有连续导数.

(c)$(y^4-3x^2)y'+xy=0$.

例 11 解微分方程 $xyy'-y^2+a^2x^3\cos x=0$.

解：变量替换，变成线性方程.

令 $u=y^2$，得 $xu'-2u+2a^2x^3\cos x=0$.解得 $u=x^2(C-2a^2\sin x)$.代入，得 $y^2=x^2(C-2a^2\sin x)$.

习题 解下列微分方程.

(a)$6xy^2y'+2y^3+x=0$.

(b)$xy'+y\ln y=\dfrac{y}{x}$.

(c)$\cos y\dfrac{dy}{dx}-\cos x\sin^2y=\sin y$.

例 12 解微分方程$(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$.

解：全微分方程.

记 $P(x,y)=x^2-1, Q(x,y)=2xy-\cos x$，则$\frac{\partial P}{\partial x}=2x=\frac{\partial Q}{\partial y}$. 因此，这是全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x -\cos x\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-1)\mathrm{d}y=-\sin x+y(x^2-1).$$

于是，微分方程的通解为 $-\sin x+y(x^2-1)=C$.

习题 解下列微分方程.

(a) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y$.

(b) $yy'\sin^2 x+y^2\cos x\sin x=1$.

例 13 解微分方程 $(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$.

解: 凑微分，化为全微分方程.

改写方程，得 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)=0$. 即 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+\mathrm{d}(x^2+y^2)=0$. 再改写，得 $\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$. 积分得微分方程的解 $x+\ln(x^2+y^2)=C$.

习题 解下列微分方程.

(a) $y\mathrm{d}x+(x-x^3y)\mathrm{d}y=0$.

(b) $y\mathrm{d}x=(x^2+x+y^2)\mathrm{d}y$.

例 14* 当 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 满足什么条件时，微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 有形如 $\mu(x)$ 的积分因子?

解: 积分因子.

设方程有形如 $\mu(x)$ 的积分因子，于是 $\mu(x)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程. 应有 $Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}=\mu\frac{\partial P}{\partial y}$. 改写，得 $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$. 即 $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ 与 y 无关.

反之，如果 $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ 与 y 无关，则 $\mu=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x}$ 就是一个积分因子.

习题

(a) 当 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 满足什么条件时，微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 有形如:

(1) $\mu(x\pm y)$ 的积分因子?

(2) $\mu(x^2+y^2)$ 的积分因子?

(3) $\mu(xy)$ 的积分因子?

例 15* 解微分方程 $\left(3x^2+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x^3}{y}+1\right)\mathrm{d}y=0$.

解: 用待定系数法确定积分因子，化为全微分方程.

考虑形如 x^my^n 的积分因子. 以 x^my^n 乘以微分方程的两端，得

$$(3x^{m+2}y^n+x^{m-1}y^{n+1})\mathrm{d}x+(x^{m+3}y^{n-1}+x^my^n)\mathrm{d}y=0.$$

设其为全微分方程，求偏导数，代入充分必要条件，得

$$3nx^{m+2}y^{n-1}+(n+1)x^{m-1}y^n=(m+3)x^{m+2}y^{n-1}+mx^{m-1}y^n.$$

比较系数，得方程组 $3n=m+3, n+1=m$. 解方程组得 $m=3, n=2$. 积分得原方程的解为 $x^6y^2+\frac{2}{3}x^3y^3=C$.

习题 解下列微分方程.

(a) $(2x^2y+3xy^2+y)\mathrm{d}x+(x^3+3x^2y+x)\mathrm{d}y=0$

(b) $y\mathrm{d}x+x(y^3+\ln x)\mathrm{d}y=0$.

第二节 高阶微分方程

例 1 解微分方程 $2xy''+(y')^3+y'=0$.

解:不出现 y 的二阶微分方程.

令 $p(x)=y'$,则 $p'(x)=y''$.代入,得 $2xp'+p^3+p=0$.这是可以分离变量的微分方程.解之得 $y'=p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{C_1x-1}}$.再积分,得 $y=\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1x-1}+C_2$.

习题 解下列微分方程.

(a) $xy''=\sqrt{1+(y')^2}$.

(b) $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$.

例 2 解微分方程 $yy''-(y')^2=y^2y'$.

解:不出现 x 的二阶微分方程.

令 $p(x)=y'$,则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.代入,得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=y^2p$.即 $p=0$ 或 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=y^2$.

由 $p=0$,得 $y=C$.

由 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=y^2$,得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=y(C_1+y)$.如果 $C_1=0$ 再积分,得 $y=\dfrac{1}{C_2-x}$;如果 $C_1\neq0$,再积分,得 $\dfrac{1}{C_1}\ln\dfrac{y}{C_1+y}=x+\dfrac{\ln C_2}{C_1}$.整理,得 $y=\dfrac{C_1C_2e^{C_1x}}{1-C_2e^{C_1x}}$.

习题 解下列微分方程.

(a) $y''-y'(y'-y+1)=0$.

(b) $yy''+2y'-(y')^2=0$.

例 3 解微分方程 $2xy'y''=(y')^2+1$.

解:令 $u=(y')^2$,分离变量,得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u+1}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.积分,得 $\ln(u+1)=\ln x+\ln C_1$.

去对数,解出 u,开方,再积分,得 $y=\dfrac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{3/2}+C_2$.

习题

(a)解微分方程 $xy''+(1-x)y'-y=e^x$, $y(1)=0$, $y'(1)=e$.

例 4 解微分方程 $y''-4y'+3y=0$.

解:常系数线性齐次微分方程.

方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$,特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$.于是,方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

习题

(a)解微分方程 $y''-4y'+5y=0$.

(b)解微分方程 $y^{(4)}-2y''+y=0$.

(c)设函数 $y=y(x)$满足条件 $y''+4y'+4y=0,y(0)=2,y'(0)=-4$,求 $y(x)$.

例 5 已知 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$,是一个三阶常系数齐次线性微分方程的特解,求这个方程.

解:由已知,1 是单特征根, -1 是二重特征根.特征方程为 $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$.于是,方程为 $y'''+y''-y'-y=0$.

习题

(a)已知微分方程 $y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个特解 $y_1=e^{-x}$与 $y_2=2x$,求常数. a、b、c.

例 6 解微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

解:常系数线性非齐次微分方程.

特征方程 $\lambda^2-5\lambda+6=0$,特征根 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.设特解为 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$,代入,得 $a=-\frac{1}{2},b=-1$.通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}x(x+2)e^{2x}$.

习题 解下列微分方程.

(a) $y''-3y'+2y=2e^x$.

(b) $y''-2y'+2y=xe^x\cos x$.

例 7 已知微分方程 $y''+ay'+2y=f(x)$的两个特解 $y_1=2e^x+\sin x$, $y_2=\sin x$,求 a, $f(x)$及方程的通解.

解:根据定理,函数 $y_1-y_2=2e^x$ 是对应的齐次方程的特解.代入齐次方程,得 $a=-3$.于是,非齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\sin x$.再将 $y_2=\sin x$ 代入非齐次方程,得 $f(x)=\sin x-3\cos x$.

习题

(a)已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$,求 a、b、c 及方程的通解.

(b)已知微分方程 $y''+ay'+by=f(x)$的三个特解 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$,求 a、b、$f(x)$.

例 8 解微分方程 $y''-3y'+2y=\cosh 2x$.

解:线性微分方程关于右边的迭加原理.

由定义 $\cosh 2x=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$.方程 $y''-3y'+2y=\frac{1}{2}e^{2x}$ 的特解为 $y_1^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$,方程 $y''-3y'+2y=\frac{1}{2}e^{-2x}$的特解为$y_2^*=\frac{1}{24}e^{-2x}$.于是,原方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{24}e^{-2x}$.

习题 解下列微分方程.

(a) $y''-4y'+4y=ax^2+be^{2x}$.

(b) $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$.

例 9 设 p、q 是常数,函数 $R(x)$连续,用常数变易法,推导微分方程 $y''+py'+qy=R(x)$的

通解的公式.

解: 常数变易法.

设 λ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的一个根. 令 $y=u(x)e^{\lambda x}$. 代入,得

$$u''+(2\lambda+p)u'=R(x)e^{-\lambda x}.$$

(1)如果 λ 是重根,则 $2\lambda+p=0$. 于是, $u=C_2+C_1x+\int\left(\int R(x)e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$.

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}+e^{\lambda x}\int\left(\int R(x)e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x.$$

(2)如果 λ 是单根,则

$$u=C_2-\frac{C_1}{2\lambda+p}e^{-(2\lambda+p)x}+\int\left(e^{-(2\lambda+p)x}\int R(x)e^{(\lambda+p)x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x.$$

$$y=C_2e^{\lambda x}-\frac{C_1}{2\lambda+p}e^{-(\lambda+p)x}+e^{\lambda x}\int\left(e^{-(2\lambda+p)x}\int R(x)e^{(\lambda+p)x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x.$$

习题

(a)解微分方程 $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$.

(b)用常数变易法解本节的例 6 与例 8.

例 10 当实常数 p 和 q 满足什么条件时,二阶线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的任一解 $y(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时趋向于零?

解: 常系数线性方程解的性质.

方程的通解有三种可能:

(1)当方程有两个不相等的特征根时,通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$,为使方程的任一解在 $x\to+\infty$ 时趋向于零,必须且只需 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$,从而 $p=-(\lambda_1+\lambda_2)>0,q=\lambda_1\lambda_2>0$;

(2)当方程有两个相等的特征根时,通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$,为使方程的任一解在 $x\to+\infty$ 时趋向于零,必须且只需 $\lambda<0$,从而 $p=-2\lambda>0,q=\lambda^2>0$;

(3)当方程有两个共轭的特征根时,通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$,为使方程的任一解在 $x\to+\infty$ 时趋向于零,必须且只需 $\alpha<0$,从而 $p=-2\alpha>0,q=\alpha^2+\beta^2>0$.

总之,充分必要条件为 $p>0,q>0$.

习题

(a)当实常数 p 和 q 满足什么条件时,方程 $y''+py'+qy=0$ 的所有解在区间 $[0,+\infty)$ 上有界?

(b)设函数 $R(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$,则方程 $y''+8y'+7y=R(x)$ 的任一解在 $x\to+\infty$ 时趋向于零.

(c)设函数 $R(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且有界,则方程 $y''+8y'+7y=R(x)$ 的所有解在区间 $[0,+\infty)$ 上有界.

例 11 解微分方程 $x^2y''+xy'+y=1,x>0$.

解: 欧拉方程.

令 $t=\ln x$,得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=1$. 通解为 $y=C_1\sin t+C_2\cos t+1$. 于是,原方程的通解为 $y=C_1\sin\ln x+C_2\cos\ln x+1$.

习题 解下列微分方程.

(a)$x^2y''+xy'+4y=2(\cos\ln x)^2$.

(b)$4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$.

例 12 设函数 $y_1(x)$是二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零解,则函数 $y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是方程的一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解.

证:变系数线性齐次方程解的结构.

用常数变易法.令 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$,代入原方程,得 $y_1u''+(2y'_1+p(x)y_1)u'=0$.解微分方程,首先得 $u'=y_1^{-2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$,再积分即得 $u(x)=\int y_1^{-2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$.因为被积函数不恒等于 0,$u(x)$不恒等于常数,所以 $y_2(x)$与 $y_1(x)$线性无关.

习题

(a)已知函数 $y=e^x$ 是微分方程 $xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0$ 的一个特解,求这个方程的通解.

(b)设函数 $y_1(x),y_2(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解,且 $y_1y'_2\neq y'_1y_2$,则 $C_1y_1+C_2y_2$ 是方程的通解.

(c)设函数 $y_1(x),y_2(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解,且 $y_1(0)=1$,$y'_1(0)=0,y_2(0)=0,y'_2(0)=1$,则 $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$.

例 13 已知二阶线性微分方程$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6x-6$ 的三个特解 $y_1=3,y_2=3+x^2,y_3=3+x^2+e^x$,求此方程的通解.

解:变系数线性非齐次方程解的结构.

根据线性方程解的结构,函数 $y_2-y_1=x^2$ 与 $y_3-y_2=e^x$ 是方程所对应的齐次方程的特解.因为它们线性无关,根据线性方程解的结构,方程的通解为 $3+C_1x^2+C_2e^x$.

习题

(a)已知微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$的三个特解 $y_1=x-(x^2+1),y_2=3e^x-(x^2+1),y_3=2x-e^x-(x^2+1)$,求此方程的满足初值条件 $y(0)=0,y'(0)=0$ 的特解.

(b)已知微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$的三个特解 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$满足 $\dfrac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq$常数,求此方程的通解.

例 14 设函数 $y=y(x),x\in(-\infty,+\infty)$是方程 $xy''+3x(y')^2=1-e^{-x}$的解.如果 $x=c$ 是函数$y=y(x)$的极值点,则是极小值点.

证:二次方程解的性质.

如果 $c\neq0$,将 $y'(c)=0$ 代入微分方程,得 $y''(c)=\dfrac{1-e^{-c}}{c}>0$.如果 $c=0$,则$\lim\limits_{x\to0}y''(x)=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{1-e^{-x}}{x}-3[y'(x)]^2\right\}=1>0$.根据极值二阶导数条件,$x=c$ 是极小值点.

评述:在本例中,并没有求出方程的解,却研究了解的某些性质.其实,只有极少量的方程可以求出解析解.因此,求解微分方程只是微分方程理论的一部分.此外还有关于方程解的存在性,唯一性的讨论,解的稳定性的讨论等等.不过,这些东西都超出了我们教材的范围.

习题

(a)设方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 有 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 取极大值.

(b)设函数 $y=y(x), x\in[a,b]$,是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解.其中 $q(x)<0$,则

(1) $y(x)$ 不在 (a,b) 取正的极大值和负的极小值;

(2)如果 $y(a)=y(b)=0$,则 $y(x)\equiv 0$.

例 15 设函数 $q(x)<0$,则方程 $y''+q(x)y=0$ 的每个非零解至多有一个零点.

证:假设方程的解有两个不同实零点,则有极值.由 $q(x)<0$,方程的解没有正的极大值,也没有负的极小值.不妨假设极大值小于或等于0,则在极大值点的两侧,函数值小于0.由方程得 $y''y+q(x)y^2=0$.因此 y'' 与 y 同号.则解上凸.因此解至多有一个实零点.矛盾.

习题

(a)设函数 $y=f(x)$ 是方程 $y''+(y')^2=x$ 的一个解,且 $f'(0)=0$,则点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的拐点.

例 16 解微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y\end{cases}$.

解:常系数线性齐次微分方程组.

从第一个方程可得 $y=\dfrac{1}{2}(x'+x)$.代入第二个方程,整理得 $x''-2x'+x=0$.解这个方程,得 $x=(Ct+D)e^t$.代入第二个方程,得 $y=[D+C(t+\dfrac{1}{2})]e^t$.

习题 解下列微分方程组.

(a) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+5y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y\end{cases}$.

(b) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=1\\ \dfrac{dy}{dt}+\dfrac{2x}{t^2}=\ln t\end{cases}$.

第三节 微分方程的应用

例 1 求曲线族,使得由 x 轴,曲线的切线及切点的向径围成的三角形的面积等于 a^2.

解:几何问题.

曲线 $y=y(x)$ 上点 $(x_0,y(x_0))$ 处的切线方程为 $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$,与 x 轴交点坐标为 $x=x_0-\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$.于是,所求曲线族满足方程 $\dfrac{1}{2}\left|y(x_0)\left(x-\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}\right)\right|=a^2$.即满足微分方程 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=\pm\dfrac{2a^2}{y^2}$.

这是一阶线性微分方程,解之得,$\frac{x}{y}=C\pm\frac{a^2}{y^2}$.

习题

(a)求曲线,过点(1,2),且在曲线上任一点处的切线与坐标原点的距离等于该点的横坐标的绝对值.

(b)求一个下凸函数,它的图形是在上半平面的一条曲线,其上任意点 $P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行.

(c)求证:所有法线都通过定点(x_0,y_0)的曲线是以点(x_0,y_0)为圆心的圆.

例 2 求曲线 $y=f(x)$,使得对于任意的 $x>0$,曲线在点$(x,f(x))$处的切线在 y 轴上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解:几何问题.

曲线 $y=f(x)$上点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,在 y 轴上的截距等于$f(x_0)-f'(x_0)x_0$.于是,曲线满足下述积分方程,

$$f(x)-f'(x)x=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ .$$

在方程两边乘以 x,再对 x 求导,得微分方程 $f'(x)+xf''(x)=0$.

这是可以降阶的微分方程.解方程,得 $f(x)=C_1\ln x+C_2$.

习题

(a)求曲线 $r=r(\theta)$,使得该曲线与射线 $\theta=0,\theta=\alpha$ 围成的图形的面积等于$\frac{1}{4}r^2(\alpha)$.

(b)设曲线 L 的极坐标方程为$r=r(\theta)$,$A(2,0)$和 $B(r,\theta)$是 L 上两点,如果极径 OA 和 OB 与L 围成的图形的面积等于曲线L 在点$A(2,0)$和 $B(r,\theta)$之间的弧长的一半,求曲线 L 的方程.

例 3 设函数 $g(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数,且对于任意的 $x\in[a,b]$,有 $g'(x)\neq g(x)$,求函数 $f(x)$,使得它与 $g(x)$的乘积的导数等于它们的导数的乘积.

解:导数问题.

要求 $f(x)$,使得$[f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)$.即满足微分方程

$$[g(x)-g'(x)]f'(x)+g'(x)f(x)=0.$$

这是可以分离变量的方程,解之得 $f(x)=Ce^{\int\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}\mathrm{d}x}$.

习题

(a)设函数 $f(x)$有连续的导数,且 $f(0)=1$.又设函数 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,$G(x)$是$\frac{1}{f(x)}$的一个原函数,且 $F(x)G(x)=-1$.求 $f(x)$.

例 4 设函数 $y=y(x)$在区间$[0,+\infty)$上有连续的导数,且 $y(0)=0,0\leqslant y'(x)\leqslant y(x)$,则 $y(x)=0$.

证:导数不等式.

因为 $y(0)=0, y'(x)\geqslant 0$，根据单调判定定理，有 $y(x)\geqslant 0$.

令 $g(x)=y'(x)-y(x)$，则 $g(x)\leqslant 0$. 将左式作为微分方程，有通解

$$y(x) = e^{x}\left(y(0)+\int_0^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right) = e^{x}\int_0^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

因为 $g(x)\leqslant 0$，根据定积分保号性定理，有 $y(x)\leqslant 0$. 于是，$y(x)\equiv 0$.

评述：在微分学和积分学中，我们证明了许多不等式. 但都是导数控制函数，或高阶导数控制低阶导数. 这个命题告诉我们：反方向的不等式一般是不存在的. 此外，这个命题可以用微分学的方法证明，也可以用积分学的方法证明(见第三章第三节例 12)，不过最简单的或许是这个用微分方程的证明.

习题

(a)设函数 $a(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，函数 $u(x), v(x)$在区间$[0,+\infty)$上有连续的导数，且 $u(0)=v(0), u'(x)=a(x)u(x), v'(x)\geqslant a(x)v(x)$，则 $u(x)\leqslant v(x)$.

例 5　设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 可导，$f(0)=1$，且满足函数方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$.

解：将函数方程改写，得

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-1}{y}f(x)=\frac{f(y)-f(0)}{y}f(x).$$

取极限，得 $f'(x)=f'(0)f(x)$. 解方程，得 $f(x)=e^{f'(0)x}$.

习题

(a)设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 可导，$f(0)=0$，且满足函数方程 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，求 $f(x)$.

(b)设函数 $f(x)$可导，且满足函数方程 $f(x+y)=e^{y}f(x)+e^{x}f(y)$，求 $f(x)$.

(c)设函数 $f(x)$可导，且满足函数方程 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，其中 $x>0, y>0$，求 $f(x)$.

例 6　设函数 $f(x)$连续，满足积分方程 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x^2+f(x)$，求 $f(x)$.

解：积分方程.

令 $x=0$，得 $f(0)=0$.

因为 $f(x)$连续，积分方程左端可导，所以函数 $f(x)$可导. 将积分方程的两端同时对 x 求导，得微分方程 $xf(x)=2x+f'(x)$.

这是一阶线性方程. 解之得 $f(x)=Ce^{-\frac{x^2}{2}}+2$. 由 $f(0)=0$，得 $C=-2$. 于是，$f(x)=2-2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

评述：在解微分方程时，得到通解就结束了. 除非原题中给定初值，还需确定任意常数，以得到特解. 在解积分方程时，情况不同. 因为积分方程不但给出函数关系，还可能同时给出初值.

似乎可以这样说，微积分不过是引入了函数的求导运算及其逆运算——不定积分. 因此，看到问题时，只要条件允许，先求导再说. 如果得到一个微分方程，或许就大功告成了.

习题

(a)设函数 $f(x)$连续,满足积分方程 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$,求 $f(x)$.

(b)设函数 $f(x)$连续,满足积分方程$(x+1)\int_0^x tf(t)dt=x\int_0^x f(t)dt$,求 $f(x)$.

例 7 设函数 $f(x)$连续,且满足积分方程 $f(x)=\sin x+\int_0^x (x-t)f(t)dt$,求 $f(x)$.

解:积分方程.恒等变形.

令 $x=0$,得 $f(0)=0$.

整理,得 $f(x)=\sin x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$.求导,得 $f'(x)=\cos x+\int_0^x f(t)dt$.令 $x=0$,得 $f'(0)=1$.

再求导,得 $f''(x)+f(x)=-\sin x$.解微分方程,代入初值,得 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

习题

(a)设函数 $f(x)$连续,满足积分方程 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\sin x+\int_0^x f(t)dt$,求 $f(x)$.

(b)设函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=1$,且满足方程 $f'(x)+f(x)=\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt$,求导数 $f'(x)$,并证明:当 $x\geqslant 0$ 时,有 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

例 8 设函数 $f(x)$连续,满足积分方程 $\int_0^1 f(xt)dt=nf(x)$,求 $f(x)$.

解:积分方程.换元.

令 $u=tx$,积分方程变成 $\int_0^x f(u)du=nxf(x)$.对变量 x 求导,得微分方程 $nxf'(x)+(n-1)f(x)=0$.

这是可以分离变量的方程.如果 $n=0$,则 $f(x)=0$;如果 $n=1$,则 $f(x)=C$;否则 $f(x)=Cx^{\frac{1-n}{n}}$.

习题

(a)设函数 $f(x)$连续,满足积分方程 $\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{2}f(x)+1$,求 $f(x)$.

(b)设函数 $f(x)$是连续的偶函数,满足积分方程 $4\int_0^x f(t-x)dt+f'(x)=x$,求 $f(x)$.

例 9 设函数 $f(x)$有连续的二阶导数,且满足积分方程 $f(x)=\int_0^x f(1-t)dt+1$,求 $f(x)$.

解:积分方程.其他问题.

令 $x=0$,得 $f(0)=1$.求导,得 $f'(x)=f(1-x)$.令 $x=1$,得 $f'(1)=1$.

再求导,得 $f''(x)=-f'(1-x)$.从两式消去导数,得 $f''(x)+f(x)=0$.

解方程,得 $f(x)=\cos x+\frac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 是二次多项式,函数 $g(x)$ 连续,且它们满足积分方程组 $(1+x)f(x)=1+\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$,$(1+x)g(x)=3+9\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$、$g(x)$.

例 10 设函数 $u=f(r)$,$r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{-3/2}$,求 $f(r)$.

解:偏微分方程.

用复合函数导数公式.将函数 $u=f(r)$,$r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$对变量 x 求导两次,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(r)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

利用对称性可得对变量 y 的二阶偏导数.将两式相加,得$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{f''(r)}{x^2+y^2}$.与问题中的微分方程比较,得常微分方程 $f''(r)=(x^2+y^2)^{-1/2}=e^{-r}$.

这是可以降阶的微分方程.积分两次,得 $f(r)=e^{-r}+C_1r+C_2$.

习题

(a) 设函数 $u=f(r)$,$r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$,求 $f(r)$.

(b) 设函数 $f(x)$在区间$[1,+\infty)$上有连续的二阶导数,且 $f(1)=0$,$f'(1)=1$.又设函数 $u=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,求 $f(x)$.

例 11 设函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续,且满足积分方程 $f(t)=\iint_D f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)\mathrm{d}\sigma+e^{4\pi t^2}$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4t^2$,求 $f(x)$.

解:重积分方程.

易见 $f(0)=1$.用极坐标系,得 $f(t)=2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right)\mathrm{d}r+e^{4\pi t^2}$.对 t 求导,得微分方程 $f'(t)=8\pi tf(t)+8\pi te^{4\pi t^2}$.

这是一阶线性微分方程.解方程,得 $f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$连续,$f(0)=0$,且满足积分方程

$$f(t)=\iint_D x\left[1-\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}\sigma\text{,其中 } D:x^2+y^2\leqslant t^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\text{,求 } f(x).$$

(b) 设函数 $f(x)$连续,且满足积分方程 $f(t)=3\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v+t^3$,其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$,求 $f(x)$.

例 12 设函数 $f(x)$有连续的导函数,$f(0)=1$.又设曲线积分

$\int_L [f(y)+y^2]\mathrm{d}x+[xf(y)+y\sin y]\mathrm{d}y$ 与路径无关,求 $f(x)$.

解:曲线积分问题.

根据曲线积分与路径无关的条件,得微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f'(y)+2y=f(y)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

这是一阶线性方程,解之得 $f(y)=Ce^y+2(y+1)$. 将 $f(0)=1$ 代入,得 $C=-1$. 即 $f(y)=2(y+1)-e^y$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数,$f(0)=1$,且曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x-[f(x)-e^x]\mathrm{d}y$ 与路径无关,求 $f(x)$.

(b) 设函数 $f(x)$ 二次可导,且曲线积分

$$\int_L [f''(x)+6f(x)+40\cosh 2x]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y \text{ 与路径无关,求 } f(x).$$

例 13 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数,$f(0)=2$. 又设沿平面上任意的简单闭曲线,曲线积分 $\int_L 2xyf(x^2)\mathrm{d}x+[f(x^2)-x^4]\mathrm{d}y=0$,求 $f(x)$.

解:曲线积分问题.

由沿任意闭曲线积分等于零的条件,有 $2xf'(x^2)-4x^3=2xf(x^2)$. 令 $u=x^2$,得 $f'(u)-f(u)=2u$.

这是一阶线性方程,解得 $f(u)=Ce^u-2(u+1)$.代入 $f(0)=2$,得$f(u)=4e^u-2(u+1)$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数,$f(1)=f'(1)=1$,且对任意的不与 y 轴相交的简单闭曲线 L 满足 $\int_L \left[\frac{y^2}{x}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathrm{d}x+\left[y-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathrm{d}y=0$,求 $f(x)$.

(b) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数,且 $f(0)=0, f'(0)=1$. 又设 $[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分,求 $f(x)$ 和 $u(x,y)$.

例 14 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$. 又设对于半空间 $x>0$ 内的任意光滑有向闭曲面 Σ,都有 $\iint_\Sigma xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,求 $f(x)$.

解:用闭曲面上积分恒等于零的条件.

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x}=0$$

这是一阶线性方程.用公式,得 $f(x)=\frac{1}{x}(Ce^x+e^{2x})$.取极限,得 $C=-1$.

习题

(a) 设函数 $f(x)$ 有连续导数,且曲面积分 $\iint_\Sigma xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在任

意的光滑有向闭曲面 Σ 上等于零,求 $f(x)$.

例 15 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

解:幂级数的和函数.

首先可见幂级数在全数轴收敛. 记 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,则 $F(0)=1$. 逐项求导,得 $F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,则 $F'(0)=0$. 逐项求导,得微分方程 $F''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=F(x)$.

这是二阶常系数线性齐次方程,解之得 $F(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$. 用初值条件,得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 即 $F(x)=\cosh x$.

习题 求下列幂级数的和函数.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$.

(c)设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$,则 $f(2x)=2f(x)g(x)$.

答案与提示

第一节 一阶微分方程

1. (a) $-\ln(1-e^{y})=e^{x}+C$. (b) $\ln\cot\frac{y}{2}=2\sin x+C$.

2. (a) $(y+\sqrt{x^2+y^2})=Cx^2$. (b) $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C$. (c) $y^3=-3x^3(\ln x+C)$.

3. (a)令 $u=x^2+y^2$. $x^2+y^2=-\frac{1}{x+C}$. (b)令 $u=\frac{y^2}{x}$. $\sin\frac{y^2}{x}=Cx$.

4. (a) $y=e^{-\sin x}[C+(x\ln x-x)]$. (b) $y=e^{-f(x)}[C+(f(x)e^{f(x)}-e^{f(x)})]$.

5. (a) $x=y(C+\frac{1}{3}y^3)$. (b) $y=\begin{cases}(1-e^{-2})e^{2x}, x\geqslant 1\\ e^{2x}-1, x<1\end{cases}$. (c) $y=(4-a)x+\frac{3}{2}ax^2$, $-8<a<4$.

6. (a)换元 $u=x-t$. 求导.

7. (a) $\alpha+\beta=1$. (b)将 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$ 代入方程,再积分.

8. (a)用特解.

9. (a)仿本例证明. $a>0$ 时,使 $y(1)=\lim_{x\to 0+}\int_x^1 q(t)t^{a-1}\mathrm{d}t$ 成立的特解有界. (b)用通解与洛必达法则. (c)用特解与定积分保号性定理.

10. (a) $\frac{1}{y}=x\left(C+\frac{1}{2x^2}\right)$. (b) $y=\frac{g(x)}{C+x}$. (c)以 y 为自变量. $x^2=y^4(Cy^2+1)$.

11. (a)令 $u=2y^3$. $2y^3=\frac{1}{x}\left(C-\frac{1}{2}x^2\right)$. (b)令 $u=\ln y$. $\ln y=\frac{1}{x}(C+\ln x)$.

(c)令 $u=\frac{1}{\sin y}$. $\frac{1}{\sin y}=e^{-x}[C+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)]$.

12. (a)$x^2+\frac{3}{2}(x^2-y)^{3/2}=C$. (b)$-x+\frac{1}{2}y^2\sin^2 x=C$.

13. (a)$-\frac{1}{2(xy)^2}+\frac{1}{y}=C$. (b)$\arctan\frac{y}{x}+y=C$.

14. (a)(1)$\frac{1}{Q+P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$是$x-y$的函数. (2)$\frac{1}{xQ-yP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$是$x^2+y^2$的函数. (3)$\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$是$xy$的函数.

15. (a)$x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^2=C$. (b)$y\ln x+\frac{1}{4}x^4=C$.

第二节　高阶微分方程

1. (a)$y=C_1x^2-\frac{1}{2C_1}\ln x+C_2$. (b)$y=x^2\arctan C_1x-\frac{x}{C_1}+\frac{1}{C_1^2}\arctan C_1x+C_2$.

2. (a)$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$或$y=C$. (b)$\frac{1}{C_1}\ln(2+C_1y)=x+C_2$或$y=C$.

3. (a)令 $u=y'-y$. $y=e^x\ln x$.

4. (a)$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. (b)$y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. (c)$y=2e^{-2x}$.

5. (a)$a=1, b=c=0$.

6. (a)$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$.

(b)$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{4}xe^x[\cos x+(x-\frac{1}{2})\sin x]$.

7. (a)$a=-3, b=2, c=-1, y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$. (b)$a=-1, b=-2$. $f(x)=e^x(1-2x)$.

8. (a)$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{a}{8}(2x^2+4x+3)+\frac{b}{2}x^2e^{2x}$.

(b)$a=0$时,通解为 $y=C_1+(C_2+C_3x)e^{-3x}+\frac{1}{9}x$. 否则

$y=C_1+e^{-3x}(C_2\cos|a|x+C_3\sin|a|x)+\frac{x}{9+a^2}$.

9. (a)$y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln x$.

10. (a)$p^2>4q\geqslant 0$,或 $p^2=4q>0$,或$4q>p^2\geqslant 0$. (b)用本例求通解. 用洛必达法则求积分项的极限. (c)用习题(b)

11. (a)$y=C_1\sin(2\ln x)+C_2\cos(2\ln x)+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos(2\ln x)+\frac{1}{4}\ln x\sin(2\ln x)$.

(b)$y=(C_1+C_2x)x^2+C_3-\frac{1}{36x}$.

12. (a)用本例. $y=(C_1+C_2x^3)e^x$. (b)用反证法. 假设 $ay_1(x)-by_2(x)=0$,且$a\neq 0$. (c)求 $G(x)=y_1y'_2-y'_1y_2$ 满足的微分方程.

13. (a)$y=e^x-x-(x^2+1)$. (b)$C_1[y_2(x)-y_1(x)]+C_2[y_3(x)-y_1(x)]+y_1(x)$.

14. (a) 此时有 $f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$. (b)(1) 仿本例证明. (2) 用(1) 与反证法.

15. (a) 将解做泰勒展开到二阶. 研究原点两侧二阶导数的符号.

16. (a) $x = e^{-t}[-(2C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - 2C_2)\sin t]$, $y = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$.

(b) $x = C_1 t^2 + \dfrac{C_2}{t} + \dfrac{1}{9}t^2\ln t - \dfrac{1}{6}t^2\ln^2 t$,

$y = -2C_1 t + \dfrac{C_2}{t^2} + 1 - \dfrac{1}{9}t + \dfrac{1}{9}t\ln t + \dfrac{1}{3}t\ln^2 t$.

第三节　微分方程的应用

1. (a) $y = \sqrt{x(5-x)}$. (b) $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x - 1$. (c) 写出法线方程. 再积分.

2. (a) $r = Ce^{\theta}$. (b) $\dfrac{1}{r} = \cos(\theta \pm \dfrac{\pi}{3})$.

3. (a) $f(x) = e^{-x}$ 或 $f(x) = e^{x}$.

4. (a) 令 $y(x) = v(x) - u(x)$, $y'(x) - a(x)y(x) = h(x)$, 证明 $y(x) \geqslant 0$.

5. (a) $f(x) = \tan[f'(0)x]$. (b) $f(x) = f'(0)xe^{x}$. (c) $f(x) = f'(1)x\ln x$.

6. (a) $f(x) = e^{2x}\ln 2$.　(b) $f(x) = \dfrac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

7. (a) $f(x) = Ce^{x} - \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$. (b) 解方程, 得 $f'(x) = \dfrac{-1}{x+1}e^{-x}$. 再用单调性, 微积分基本定理与定积分的保号性定理.

8. (a) $f(x) = 2 + Cx$.　(b) $f(x) = \dfrac{1}{4} + C_1\cos 2x$.

9. (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 3x^2 + 6x + 3$.

10. (a) $f(r) = (C_1 - r)e^{-r} + C_2$.　(b) $f(r) = \dfrac{\ln r}{r}$.

11. (a) $f(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 2$. (b) $f(t) = Ce^{4\pi t^3} - \dfrac{1}{4\pi}$

12. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$.　(b) $f(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} - 4xe^{-2x} - 5e^{2x}$.

13. (a) $f(r) = r^3 - r^2 + 1$.　(b) $f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$.

14. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}(C - \dfrac{1}{2}x^2)$.

15. (a) $F(x) = \sinh x$, $-\infty < x < +\infty$. (b) $F(x) = \dfrac{1}{2}(\sinh x + \sin x)$, $-\infty < x < +\infty$. (c) 用习题(a).

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学（微积分）７００例题 杨延龄等著，２００４
作者＝杨延龄等著
页数＝３２７
ＳＳ号＝１１３６０３３８
出版日期＝２００４年１０月第１版